“La Demostración Matemática en el aula, una estrategia para reducir el abandono escolar”.

Mat. Claudia M. Hernández Nava.

M. en C. Juan Jiménez Krassel.♦

Resumen: El principal objetivo del presente texto es acercar a los lectores al complejo y poliédrico tema de la demostración matemática para ubicar el rol que ésta desempeña en la didáctica de la educación media y sea aprovechada en el aula como una propuesta que ayude en la mejora del desempeño matemático del estudiante y, con ello, favorecer la disminución del abandono escolar. Analizando la doble naturaleza de las matemáticas –intuitiva y deductiva–, retornando al camino que siguen los matemáticos en su quehacer, y bajo la filosofía aristotélica de “aprender haciendo”.
Palabras clave: Demostración matemática. Didáctica de las matemáticas. Matemática educativa.

El Problema.

Aunque la mayoría de los países latinoamericanos mejoró su rendimiento en matemáticas según el último informe PISA[1] del 2012 dado a conocer por la OCDE[2] respecto de años anteriores –del 2003 al 2012– con Chile, México, Uruguay, Costa Rica y Brasil a la cabeza (OCDE: 2013). El diagnostico reveló que todos estos países se encuentran por debajo de la media establecida por la OCDE, lo cual significa que un gran número de nuestros estudiantes de entre 15 y 16 años de edad inscritos en la escuela no llegan a realizar la más básica y simple de las tareas en capacidad matemática, a lo sumo, solucionan problemas muy sencillos que no exigen pensar por adelantado. Este bajo desempeño matemático es un factor de riesgo que se manifiesta en la poca o nula apertura de los estudiantes para aprender matemáticas y además favorece el absentismo escolar que muy probablemente se traducirá en el abandono total de la Educación Media Superior (EMS), por ejemplo, en México la eficiencia terminal de ésta es del 42% y de dicho porcentaje de estudiantes sólo el 87.5% ingresa a la universidad pero únicamente el 33.3% logran concluirla. En otras palabras, de cada 100 ingresos a la educación básica –primaria– egresan de la universidad 14 (INEE: 2015)[3].

La estadística anterior en términos que utilizaría el Dr. en psicología Juan Ignacio Pozo indica que una amplia proporción del estudiantado latinoamericano pertenece a la categoría de los *alumnos aritméticos*. El Dr. Pozo en sus estudios sobre psicología cognitiva del aprendizaje hace una diferenciación entre los *alumnos aritméticos* y los *teóricos*, los primeros, explica que poseen una mente simbólica porque se limitan a aprender procedimientos algorítmicos para usarlos con éxito –en el mejor de los casos– logrando así un uso mecánico y pragmático de las matemáticas

---

♦ Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ciencias.
MADEMS, Maestría en Docencia para la Educación Media Superior.
e-mail: henacm@gmail.com

[1] Programme for International Student Assessment.
[2] Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos.
[3] Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. México.

pero sin comprenderlas; a los *alumnos teóricos* los define como aquellos que además de dominar los sistemas de numeración también entienden la naturaleza y la lógica interna de la matemática, han evolucionado hacia la mente teórica que es la exclusiva del ser humano y le permite aprender (Pozo: 2008, 85)[4]. Siguiendo con las aportaciones del Dr. Pozo: "*Aprender y Enseñar Ciencia"*, texto que trata sobre el proceso gradual del conocimiento cotidiano al científico, entre otros tópicos, propone 5 nuevas metas para la educación científica actual con algunas de las cuales formulamos la siguiente ecuación que consideramos fundamental en la práctica docente ya que valora de manera simultánea el contenido que se enseña, lo que el estudiante aprende y los objetivos que se requieren:

Saber la disciplina + Estudiante + Demandas sociales y educativas
= Nueva Cultura del Aprendizaje del siglo XXI

En adelante nos enfocaremos en el primer sumando: *Saber la disciplina*, por medio de la investigación que realizamos acerca del quehacer matemático: "La Demostración Matemática", práctica curricular que pareciera olvidada y que estimamos como un instrumento eficiente al proceder en el aula para favorecer el dialogo matemático pertinente entre aprendices y maestros; con el cual, pretendemos que los estudiantes mejoren su desempeño matemático transformándose en *alumnos teóricos* –los que aprenden matemáticas desde la perspectiva de su doble naturaleza: La Intuición y la Deducción–. Con la práctica de la demostración matemática en el aula, esperamos se reduzca el abandono escolar.

La Demostración Matemática.

La etimología de la palabra demostración proviene de la lengua latina *"demonstratio"* vocablo formado por el prefijo *"de"*, el verbo *"monstrare"* y el sufijo *"tio"*, por lo que, se entiende como la acción de mostrarse. Dicha palabra se ha utilizado en distintos contextos con diversos sentidos y se ha relacionado con términos como manifestar, declarar, mostrar, probar, exhibir, revelar, exponer, evidenciar… Aunque tales expresiones para ciertos autores son sinónimos y para otros poseen diferencias fundamentales entre sí, en todas sus concepciones se reconoce una idea común: Justificar o validar una afirmación aportando diferentes tipos de razones o argumentos. En el campo de las matemáticas, donde la actividad de los matemáticos consiste en la demostración de teoremas, dicho término es usado con un significado similar: *"Una secuencia de enunciados organizados según reglas determinadas… bien definidas cuya validez es socialmente compartida."* (Godino y Recio: 2001, p.406). La demostración matemática no es propiamente un concepto como tal, sino más bien es una técnica de prueba que ocupa un lugar central dentro de las matemáticas ya que su empleo sistemático caracteriza esta disciplina de entre otras ciencias. Desafortunadamente y aunque parezca paradójico a la fecha no es posible contar con una definición formal y universal de demostración matemática, además de que la literatura sobre ésta es poco abundante posiblemente por dos razones de distinta naturaleza, la primera reside en que es una actividad exclusiva del matemático y, la segunda, a que su estudio a lo largo de la historia se ha tornado complicado (Arsac: 1987).

Muchos historiadores coinciden en que el griego Tales de Mileto en la primera mitad del siglo VI a.C. introdujo la noción de *demostración* al fundamentar la geometría como sistema deductivo, pero otros, consideran que sus dos puntos de partida se presentaron en el siglo V a.C. con el surgimiento de las conocidas paradojas de Zenón y con el descubrimiento de parejas de segmentos inconmensurables atribuido al pitagórico Hipaso, de hecho, algunos afirman que su prueba de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ es la primer demostración matemática. Según Kline (1992, p.75)

[4] Véase "La Teoría de la Evolución de la Mente" del psicólogo canadiense W. Donald propuesta en el año 2001.

Platón en el siglo IV a.C. sistematizó las reglas de la demostración rigurosa dado que en su academia ateniense se ordenaron ciertos teoremas en secuencia lógica. Por su parte, Euclides en el siglo III a.C. en su famosa obra de *"Los Elementos"* recoge en 13 libros –con fines didácticos– gran parte del saber matemático de su época y además inculca con este tratado un modelo de ciencia deductiva con ideas muy estrictas sobre el rigor lógico que perdurarían por más de 2000 mil años. La historia dejará como asignatura pendiente la respuesta a la interrogante acerca del origen de la demostración, sin embargo, resulta innegable atribuirle a la cultura griega la introducción de la demostración en matemáticas. Es a partir de la Edad Media con los escolásticos y hasta nuestros días que esta forma de demostración 'griega' basada en el método deductivo va a ir adoptando diversas exigencias teóricas según las demandas culturales de cada época, tales variaciones han ido de la mano de mentes tan respetables como las de Tartaglia, Cardano, Ferrari, Fermat, Descartes, Euler, Newton, Leibniz, Lobachewsky, Hilbert, Russell, Poincaré, Cantor y Gödel, entre otras más. En la siguiente tabla exponemos, de forma simple y directa, algunos de los momentos importantes en la evolución de los mecanismos de validación –sistemas lógicos– que ha presentado la demostración matemática, los cuales, han sido utilizados y aceptados por la comunidad matemática.

Sistema Lógico	**Precursor**	**Mecanismo de Validación**	**Notación**
Lógica Aristotélica	Aristóteles IV a.C.	Silogismo	"Todo P es M"
Lógica Proposicional	Estoicos III a.C.	Proposiciones atómicas y moleculares	"p ∧ q"
Álgebra Booleana	George Boole XIX	Proposiciones como clases	"p(1-m)=0"
Lógica de Predicados	Frege XIX	Predicados	"Vx:hombre(x)→mortal(x)"
Teoría de Conjuntos	Cantor XIX	Conjuntos	"(Vx, Hx)(Px)"

Este breve recorrido histórico sobre algunas ideas que han rodeado a la demostración matemática nos aleja de una visión puramente formalista donde la veracidad –universal e intemporal– de un teorema descansa en la validez de las reglas lógicas utilizadas durante el proceso demostrativo. Respecto a la práctica matemática 'cotidiana' podemos inferir que la demostración es variante, perfectible, sin un patrón definido y con veracidad temporal; es un concepto que todavía no está en posibilidad de ser definido. En el ámbito profesional las demostraciones son deductivas pero no formales debido a que se expresan mediante lenguaje ordinario y el uso de expresiones simbólicas, los matemáticos admitimos que éstas pueden presentar diferentes grados de validez formal aunque posean el mismo grado de aceptación dentro de la comunidad científica (Godino y Recio: 2001). Por los párrafos anteriores, llegamos a la conclusión de que el significado de demostración en matemáticas dependerá del contexto institucional en que sea tratado –Los 5 principales son: Lógica y fundamentos, la matemática profesional, las ciencias experimentales, la vida cotidiana y el aula–.

Ahora afrontaremos el tema con un enfoque social, desde el campo de la didáctica, cuyos representantes afirman que la demostración matemática presenta diversos tipos y por tanto múltiples intenciones. En cuanto a su clasificación se ha atendido primordialmente a los siguientes 5 criterios: 1) La estructura lógica de su enunciado, 2) Procedimientos lógicos, 3) Procedimientos matemáticos, 4) Procedimientos de exposición, y 5) Forma de pensamiento lógico que desarrolla (Crespo: 2005).[5]

---

[5] 1) La estructura lógica de su enunciado: implicación A⇒B, doble implicación A⇔B, universal ¥ y existencial Ǝ.

Acerca de su intensión tradicionalmente se ha considerado que el fin sustancial de la demostración es la legitimación del saber matemático pero ésta no es su única función, numerosas investigaciones en torno al tema que datan desde hace 40 años han reconocido aproximadamente 31 funciones, cuyas más populares son: Verificación, iluminación, sistematización, validación, explicación, descubrimiento, comunicación, desafío intelectual, teoría empírica, exploración y comprensión. A pesar de la inexistencia de un esquema general de las funciones de la demostración matemática en la corriente formalista tienen lugar preferencial las funciones de verificación y sistematización, por otra parte, los especialistas en didáctica asumen 5 funciones como clásicas –las dos anteriores además de explicación, descubrimiento y comunicación–; en tal ambiente educativo se admite como función predominante la explicación y se concibe a la demostración como un discurso matemático. Las tendencias de los expertos se inclinan en definir la explicación a la manera de Balacheff (1987): *"Discurso que pretende hacer inteligible el carácter de verdad, adquirido para el locutor, de una proposición o de un resultado"*. En sus trabajos sobre los esquemas de demostración, Ibañes confirmó que las demostraciones con mayores cualidades explicativas son las que más convencen a los estudiantes en el aula quizá por su aspecto aclaratorio (Ibañes y Ortega: 2004). El profesor francés Raymond Duval afirma que *"La intención de explicar es describir"* (Duval: 1999, p.9). Pensar en las funciones de la demostración matemática nos lleva a reflexionar sobre los aportes que ésta proporciona en la formación de un individuo, desde su ángulo, Bravo y Arrieta (2005) nos aseguran que las ya citadas funciones están presentes en todo el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas –cabe aclarar que no se ponen de manifiesto simultáneamente al demostrar– también reportan que con la práctica de la demostración el estudiante adopta la función formativa. Dentro del aula la demostración formal o rigurosa sufre ciertas modificaciones dado que se ejercitan otras funciones además de verificar y sistematizar como explicar, comunicar, describir, explorar y comprender; en la clase de matemáticas 'el demostrar' implica la participación de los estudiantes en un contrato didáctico donde la demostración se muda en una actividad no exclusiva de matemáticos.

La Demostración Matemática en la Facultad de Ciencias de la UNAM, México.

Como parte de nuestra indagación acerca de las concepciones que actualmente se poseen sobre el controvertido tema de la demostración en matemáticas decidimos realizar un cuestionario de 16 preguntas abiertas al respecto y lo aplicamos, a manera de encuesta, a algunos miembros de la sociedad matemática en activo –docentes e investigadores– de la Facultad de Ciencias de la UNAM en México, de campos disciplinares diversos: Lógica matemática, topología, filosofía e historia de la ciencia, teoría de los números, y otros. En seguida expondremos una porción de los resultados obtenidos, sólo los concernientes al significado de la demostración, a sus funciones y a su didáctica.

Aunque los encuestados no ubican una definición absoluta de demostración matemática, todos identifican una estructura única en su construcción: A partir de hipótesis y del conocimiento teórico previo –por implicaciones lógicas que no se contradicen entre sí– se desencadena una sucesión jerárquica de afirmaciones que llevan de lo conocido hacia un nuevo conocimiento; asimismo, la reconocen como un constructo social porque su validez está sujeta a las prácticas y criterios matemáticos vigentes de cada época que son aceptados por los entendidos del tema a tratar, y a su vez, caracterizan a la demostración por lo 'verdadero', lo lógicamente correcto y lo universal. Tocante a las funciones de la demostración la población participante mencionó 10 en el orden siguiente: Verificación, explicación, validación, comprensión, comunicación, descubrimiento,

---

2) Procedimientos lógicos: silogismo, reducción al absurdo, inducción, construcción, analogía, dualidad, etc.
3) Procedimientos matemáticos: geometría sintética, álgebra, método cartesiano y análisis matemático.
4) Procedimientos de exposición: modo sintético o directo y modo analítico o indirecto.
5) Forma de pensamiento lógico que desarrolla: deductiva e inductiva.

exploración, sistematización, instrucción y formación; tales funciones coinciden con las atribuidas por los versados en la materia. Unánimemente estimaron a la verificación –*"establecer la verdad de las proposiciones"*– como la principal y en segundo lugar la de explicar los conceptos matemáticos. En el terreno de la didáctica las percepciones aparentemente se polarizaron ya que, por un lado, el 29% respondió que no es posible enseñar a demostrar y, por el otro, un 64% afirmó que las matemáticas no se logran comprender sin referirse a la demostración. Sin embargo, en sus justificaciones el 97% coincidió en que se puede ser un 'buen usuario' de las matemáticas a la vez que se ignora su demostración; estas divididas opiniones provocaron que el proceso demostrativo se fraccionara en dos etapas de naturaleza distinta: Una creativa o intuitiva y la otra deductiva. Resumiendo, todos los involucrados convinieron en relegar a la demostración matemática a grados superiores de educación, en la posibilidad de entrenar a los estudiantes en ciertas técnicas demostrativas –según un determinado contexto–, en fomentarla por medio de su explicación y correcta notación, y en la incapacidad de enseñar a otros a que se les ocurran las ideas matemáticas.

Cabe señalar que tanto la descripción de demostración matemática como las funciones asignadas por los miembros de la Facultad de Ciencias no se opusieron a la ideología de otras investigaciones, incluso, confirmaron las correspondientes 3 tesis:

1. Aún no se constituye la definición de demostración matemática.
2. La función más importante de la demostración es la verificación.
3. Explicar es la función predominante en la enseñanza matemática.

La Demostración Matemática, una estrategia en el aula.

En atención a la recomendación del NCTM[6]: "El razonamiento y la demostración no son temas especiales del plan de estudios deben ser parte natural y continúa de las discusiones en clase, sin importar qué tema se está estudiando." (NCTM: 2000, p.342). Nos asignamos como tarea el profundizar en publicaciones ligadas a la demostración matemática en un contexto absolutamente escolar y observamos que las líneas de investigación relacionadas se han compilado en 4 apartados: El aprendizaje de la demostración, las funciones de la demostración, los niveles de la demostración y la demostración en el aula. Siguiendo la primera línea encontramos que el matemático francés Nicolás Balacheff, que desde el año 1975 ha realizado estudios en matemática educativa al respecto, fue capaz de identificar en un ensayo donde aborda la demostración 5 enfoques epistemológicos opuestos sobre su significado: Analítico, idiosincrásico, matemático, pragmático y teórico (2008).[7] En el escenario educativo la interpretación formalista de la demostración matemática es en gran manera cuestionada porque en dicha interpretación los objetos matemáticos 'pierden significado', razón por la cual, algunos autores de matemática educativa han tratado de flexibilizar su concepción con la finalidad de acercar la demostración a las prácticas que los estudiantes enfrentan en el aula; han considerado otros y varios mecanismos de validación para la EMS como conjeturas, ejemplos, contraejemplos, generalizaciones, y diversos tipos de argumentaciones. Tales intentos por adaptar la demostración matemática a situaciones exclusivamente didácticas acentúan la necesidad de una definición pertinente que pueda ser aplicada en la clase de matemáticas. Tras estudiar numerosas revisiones, aunado a nuestra experiencia docente y por influencia principal de los investigadores

[6] National Council of Teachers of Mathematics.
[7] 1. Analítico o universal: Razonamiento deductivo que sigue las reglas lógicas.
2. Idiosincrásico: Argumentos empíricos del individuo para probar su verdad.
3. Matemático: Deducciones expresadas vía el lenguaje ordinario y símbolos.
4. Pragmático: Instrumento que comunica la comprensión en las matemáticas.
5. Teórico: Sistematización teórica de las definiciones, axiomas y teoremas.

Harel y Sowder (1996), Duval (1999), Crespo (2005) y Balacheff (2008) proponemos la definición: *"Al proceso argumentativo que un estudiante realiza para justificar inferencias matemáticas de acuerdo a los criterios de validación matemática establecidos y aceptados por la comunidad del aula se le denominará Demostración Escolar"*.

Esta *Demostración Escolar* es del tipo de demostraciones que 'explican' Hanna (1989), aquellas que hacen comprensible la 'verdad' de una conjetura y son las más convincentes en didáctica. Cuya validez se establece siguiendo un modelo deductivo informal que consiste de las argumentaciones 'matemáticas' inferidas por los estudiantes que son aceptadas según ciertos principios establecidos –conocimiento previo– en clase, bajo la intervención mediadora del docente. También consideramos que el proceso de dicha *Demostración Escolar* se divide en 4 etapas: Descubrir las regularidades de una situación, mostrar ejemplos y contraejemplos, formular conjeturas o refutaciones, explicar argumentos para convencer. Y presenta atributos positivos como:

- ✓ Contribuye en la comprensión del conocimiento matemático.
- ✓ Ejercita en la práctica de las ideas o conceptos matemáticos.
- ✓ Soporte para recordar, generar y comunicar las matemáticas.
- ✓ Expone la dependencia lógica de los resultados matemáticos.
- ✓ Desarrolla en el estudiante el pensamiento crítico y reflexivo.
- ✓ Dialéctica matemática adaptable a los estándares requeridos.
- ✓ Por su carácter social, resulta significativa para el estudiante.

La demostración es un procedimiento natural en el estudio de la matemática que se va construyendo paulatinamente a lo largo de las distintas etapas escolares. Como matemáticos aseguramos que los hallazgos en esta disciplina se hacen de manera escalonada prosiguiendo con la conjetura, la prueba, la refutación y la teoría, donde además, se distingue entre la práctica matemática y su acción que consiste en demostrar. Juzgamos que en la enseñanza, la intuición productora de conjeturas es el fundamento en la comprensión de las matemáticas y la demostración formal es el apoyo justificativo –razonamiento seguro, definitivo, indiscutible, con patrón rígido–. Por tanto, en el ejercicio de la actividad docente dentro del aula es necesario aceptar como recurso inicial en la validación matemática a las demostraciones informales intuitivamente convincentes y, en una segunda etapa, entrenar e instruir a los estudiantes en los métodos de la demostración formal. En nosotros, los docentes, recae la responsabilidad de introducir a los estudiantes en un dialogo matemático formulando cuestionamientos que inviten al razonamiento argumentativo, evitando aquellos cuya respuesta se produce directamente sin que haya un razonamiento previo. Por ejemplo, cuando se aborda el tema de cálculo de superficies a grosso modo las secuencias didácticas inician mostrando una tabla con las fórmulas que corresponden a las áreas de figuras representativas e inmediatamente se procede a la realización de cálculos, en las situaciones más afortunadas dichas fórmulas se van deduciendo triangulando superficies planas regulares; a continuación compartimos una parte de la metodología que hemos empleado en clase para el desarrollo de este tema:

> La reina Dido, viuda de Siqueo, tras serle asesinado el marido por su hermano Pigmalión, rey de Tiro, huyó con inmensas riquezas a África donde compró suficiente territorio y fundó Cartago. Para delimitar dicho territorio se le proporcionó una tira muy fina de piel de toro y se le dijo que lo que abarcara con ella era el territorio que iba a poseer; la reina Dido entregó la punta de esta cinta a la matemática Teano, quien a su vez, y ayudada por otras personas, fue tendiendo esa inusitada tira de cuero sobre la superficie. Si el contorno deseado abarcó el máximo territorio, ¿qué figura crees que se formó con tal cinta? y ¿por qué?.

> Concluidos los límites del contorno de la Ciudad Nueva, el rey Yarbas se volvió hacia la reina Dido y tomándole de la mano le dijo: "Eres una mujer extraordinaria, reina Dido. Has ganado justamente el máximo del territorio sobre el cual reinarás. Y yo te ofrezco un pacto: Sé la esposa mía y unamos en uno sólo nuestros pueblos"

Después de proporcionar el texto a los estudiantes y una vez que lo han leído en voz alta, se les da una cinta métrica y se les plantean las siguientes preguntas: ¿Puedes explicar con tus propias palabras de qué se trata el problema?, ¿Cuentas con los conocimientos necesarios para resolverlo?, ¿Crees que el territorio requerido debe tener características especiales?, ¿Con una misma cuerda puedes abarcar diferentes territorios?, ¿Cuáles son las figuras que consideras útiles para dar solución al problema?, ¿Cómo podrías organizar los datos que has obtenido?, ¿Cuál es la figura que resuelve el problema?, ¿Cómo aseguras que la figura que has elegido abarca el área máxima?, ¿Con cuáles estrategias diste solución al problema?, ¿Consideras que hay otras maneras para resolverlo?.[8]

Reflexión final.

Enseñar matemáticas bajo un estilo deductivo oculta el proceso 'humano' que logró un descubrimiento mientras que el estilo heurístico subraya la lógica que dio nacimiento al nuevo conocimiento. Debemos tener presente que para introducir a nuestros estudiantes en los procesos deductivos necesitamos entrenarlos en los métodos y en las reglas admitidos porque su sistema de pensamiento no los posee de manera intrínseca, de lo contrario, afrontarán un obstáculo cognitivo. Uno de los tres contextos en que se presenta la demostración matemática es el diálogo pedagógico, donde proponemos la argumentación –exposición de ideas halladas en las atribuciones de las cosas– como reacción contra el aprendizaje mecánico ya que es útil para instruir a los oyentes reforzando o debilitando lo que se dice. Las prácticas argumentativas que planteamos en el aula son del tipo refutable –necesitan probarse– cuya estructura inicia con la controversia sobre algún tema, seguida de la posición que adopta el argumentador, su intento por convencer al otro, y la conclusión final; éstas manifiestan inferencias intuitivas que garantizan el desarrollo de argumentaciones razonables y, sobre todo, garantizan la comprensión de la actividad matemática. De esta manera, se elaboran conocimientos matemáticos de 'modo cotidiano' con razonamientos fluidos y explicables en un diálogo con el pensamiento del otro modificando opiniones hasta coincidir, revelando racionalidad. Cierto que al evaluar las argumentaciones de los estudiantes se nos presenta el conflicto de distinguir entre razones especulativas y formales pero certificaremos sus explicaciones si cumplen una función descriptiva, asumiendo que al demostrar se ponen a prueba los productos de nuestra intuición donde es innegable la influencia social y cultural, y por tanto, no existe 'verdad' absoluta. En definitiva, concluimos que en la didáctica de las matemáticas primero hay que aprender a intuir –acción creadora donde se adquieren habilidades– y, posteriormente, a demostrar según lo requiera el nivel educativo en cuestión; una vez descubierta la conjetura por uno mismo, la necesidad de la demostración matemática pertenece a otro orden de dificultad. A nuestro juicio, cuando somos capaces de falsear hipótesis propias desarrollamos una destreza de alto nivel cognitivo, aprendemos.

Para ahondar más en el asunto de la argumentación recomendamos revisar la contribución al respecto que el doctor en filosofía Stephen Toulmin hace en su texto *"The Uses of Argument"* publicado en 1958, en el cual, crea una teoría de la argumentación y crítica el supuesto de que todo argumento significativo se expresa en términos formales. Y, para adentrase en la argumentación

[8] Cabe mencionar y hacer notar que los estudiantes –independientemente de su rendimiento académico y gusto por las matemáticas– en un 100% no aciertan en responder que el círculo es la superficie plana que posee una mayor extensión. De hecho la mayoría no atiende la instrucción inicial de que la extensión del territorio requerido es máxima, en su resolución utilizaron construcciones de figuras y conteos operacionales como estrategia de verificación, se inclinaron por el uso de las formas regulares –en particular el rectángulo y el cuadrado–, y a pesar de haber solucionado el problema con ayuda los resultados obtenidos sí les generaron certeza.

matemática sugerimos leer el ensayo *"The Informal Logic of Mathematical Proof"* de Aberdein (2006).

Referencias.

Arsac, G. (1987). *El origen de la demostración: ensayo de epistemología didáctica.* Recherches en didactique des mathematiques. Vol 8. No.3.

Balacheff, N. (1987). *Processus de preuve et situations de validation*. Educational Studies in Mathematics. Vol.18. pp.147–176.

Balacheff, N. (2008). *The role of the researcher's epistemology in mathematics education: an essay on the case of proof.* ZDM Mathematics Education. No.40. pp.501–512.

Bravo, M. L. y Arrieta, J. J. (2005). Algunas *reflexiones sobre las funciones de las demostraciones matemáticas.* Revista Iberoamericana de Educación. No.35 (3).

Crespo, C. (2005). *El papel de las argumentaciones matemáticas en el discurso escolar. La estrategia de deducción por reducción al absurdo.* Tesis de Maestría no publicada. CICATA. IPN. México.

Duval, R. (1999). *Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva?.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Godino, J. D. y Recio A. M. (2001). *Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la Educación Matemática.* Enseñanza de las Ciencias. No.19(3). pp.405–414.

González, C. (2010). *Prueba, verdad, demostración: notas sobre el juego de la lógica.* Universidad Nacional Autónoma de México. México, D.F.

Harel, G. y Sowder, L. (1996). *Classifying processes of proving. 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Puig, L. y Gutiérrez, A. (eds.). Universidad de Valencia. Vol.3. pp.59–65.

Ibañes, M. y Ortega, T. (2004). *Origen, nudo y desenlace de una investigación sobre los esquemas de prueba. Aspectos cognitivos.* Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática. Facultad de Educación y Trabajo Social. Universidad de Valladolid. pp.1–25.

INEE, (2015). *Panorama educativo de México 2014. Indicadores del sistema educativo nacional. Educación básica y media superior.* México. Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días.* Alianza Editorial. Madrid

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston. USA: NCTM.

OCDE, (2013). *Aptitudes básicas para el mundo de mañana. Otros resultados del proyecto PISA 2013*. París. Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos.

Pozo, Juan Ignacio. Gómez Crespo, Miguel (2006). *Aprender y enseñar ciencia, Del conocimiento cotidiano al conocimiento científico.* Madrid. Ediciones Morata, S.L.

Pozo, Juan Ignacio (2008). *Aprendices y maestros. La psicología cognitiva del aprendizaje.* Segunda edición, Madrid. Alianza Editorial.

Sáenz, C. (2001). *Sobre conjeturas y demostraciones en la enseñanza de las matemáticas.* Universidad Autónoma de Madrid (UAM). Quinto simposio de la sociedad española de investigación en educación matemática. Almería, Septiembre 2001.