

AGUJEROS FÁSICOS IÓNICOS EN PLASMAS

Juan Ramón Collantes

Universidad Tecnológica de Panamá. Apdo: 0819-07289. Panamá

Valeri Aleksiéyevich Turikov

Universidad Rusa de la Amistad de los Pueblos. Moscú, 117198 Rusia. Miklujo-Maklaya 6.

RESUMEN

Se investigaron las propiedades más importantes de los agujeros fásicos iónicos conociendo la forma más representativa del potencial. Siguiendo al método BGK clásico se obtuvieron las expresiones analíticas para las funciones de distribución de las partículas y la dependencia del ancho de la amplitud del agujero. Esta función de distribución se usó en el análisis de la estabilidad del agujero de pequeña amplitud. Se aplicó el método de Lewis-Symon en forma de perturbaciones de ondas normalizadas localizadas en la región del agujero iónico. En este caso se desarrolla una inestabilidad análoga a la inestabilidad de rayo de partículas en un plasma uniforme.

Palabras claves: Agujeros fásicos, función de distribución, inestabilidad de rayo de partículas, método BGK, método de Lewis –Symon, ondas normalizadas.

ABSTRACT

The main properties of the ion phase space holes are investigated prescribing the most representative model of potential shape. The analytical expression for the particles distributions and the width dependence on the amplitude are obtained following the classic BGK method. This distribution is used in the stability analysis of a small amplitude ion holes. The Lewis-Symon method is used for the normal mode perturbations localized in the ion holes region. In this case an instability similar to the fluid beam-type instability in a homogeneous plasma takes place.

Keywords: BGK method, distribution function, fluid beam-type instability, Lewis-Symon method, normal mode, phase space hole.

1. INTRODUCCIÓN

En la actualidad es muy importante el estudio de las estructuras electrostáticas coherentes en plasmas sin colisiones, entre las cuales podemos nombrar a las dobles capas y a los agujeros fásicos iónicos y electrónicos. Estos últimos se llaman así, debido a que su función de distribución forma una

especie de tornado con un agujero en el centro en el espacio de velocidades. Usualmente el plasma evoluciona hasta estas configuraciones como consecuencia del desarrollo de diferentes inestabilidades en su fase no lineal así como también debido a influencias externas, lo que se demostró claramente en los

experimentos numéricos (por ejemplo, Singh & Schunk, 1984).

2. CONCEPTUALIZACIÓN

En este trabajo se analizan algunas propiedades de los agujeros fásicos iónicos surgidos como consecuencia de: la evolución de las inestabilidades a doble flujos tipo ion-ion, (Sakanaka, 1972); de la "autoorganización" de la turbulencia iónica acústica (Dupree, 1982) y de otros procesos análogos (Shamel, 1982a). Se tiene confirmación experimental sobre la existencia de estas estructuras en plasmas sin colisiones (Pecseli, Amstrong & Trulsen, 1981).

El agujero fásico iónico corresponde a la clase de equilibrios de Bernstein-Greene-Kruskal (BGK) (1957), en los cuales para mantener el perfil solitónico del potencial, la función de distribución de las partículas debe tener tal forma, que satisfaga al sistema estacionario de ecuaciones de Vlasov y Poisson. En la actualidad existen dos enfoques matemáticos en la solución teórica de este problema. El primero consiste en que se postula la forma de la función de distribución de las partículas libres y de las partículas atrapadas para luego de la ecuación de Poisson encontrar el potencial electrostático conveniente (Shamel & Bujarbarua, 1980; Meyerson & Rogachevskiy, 1987). Según nuestro punto de vista este enfoque tiene el defecto de que es muy difícil construir las funciones de distribución que correspondan exactamente a la forma del potencial buscado, se hace necesario recurrir a condiciones complementarias análogas a las condiciones del

potencial de Sagdiyev (1964). Como resultado de esto surgen estructuras que por sus propiedades son más parecidas a un solitón iónico acústico. Sin embargo para que ocurra esto no existe ningún fundamento físico, ya que estas estructuras poseen diferente naturaleza. En particular, este enfoque aplicado a los agujeros electrónicos (Bujarbarua & Shamel, 1981) dio como resultado una dependencia del ancho y de la velocidad del agujero con respecto a su amplitud que contradecía tanto a los datos experimentales, así como también a los resultados de la modelación numérica, como claramente se señala en los trabajos de Turikov (1984) y de Lisuka & Tanaka (1987).

En este trabajo se aplica el segundo enfoque, el que corresponde al esquema clásico BGK, cuando se conoce la dependencia del potencial de las coordenadas y se calcula la función de distribución de las partículas. Estas funciones se emplean para investigar la estabilidad de los agujeros iónicos de pequeña amplitud.

Si se cumple la condición $V_{Te} \gg V_0$

($V_{Te} = \sqrt{\frac{T_e}{m_e}}$ es la velocidad

térmica de los electrones, V_0 es la velocidad de propagación del agujero iónico), entonces se puede considerar que la concentración de los electrones lo describe la distribución de Boltzmann

$$n_e(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_e(x, v) dv = e^{-\frac{\phi(x)}{\theta}}$$

donde la coordenada x está normalizada en radios electrónicos de Debye λ_{De} , el potencial ϕ en unidades $\frac{T_e}{e}$, la velocidad v en

unidades V_{Te} . En este caso la ecuación de Poisson en el sistema de referencia del agujero iónico se lo puede representar de la siguiente manera:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \theta\sqrt{2} \left\{ \int_{-\phi}^0 \frac{dw f_{tr,i}(w)}{\sqrt{w+\phi}} + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{dw [f_{p,i}^{(+)}(w) + f_{p,i}^{(-)}]}{\sqrt{w+\phi}} - e^{-\frac{\phi}{\theta}} \right\} \quad (1)$$

donde: $w = \frac{V^2}{2} - \phi$ es la energía

adimensional, $\theta = \frac{T_e}{T_i}$, $f_{tr,i}$ es la función de distribución de los iones atrapados ($w < 0$), $f_{p,i}^{(\pm)}$ es la

función de distribución de los iones libres para $V > 0$ (+) y $V < 0$ (-).

Analizando a la expresión (1) como la ecuación integral de Abel con respecto a la función desconocida $f_{tr,i}$, considerando conocidas $\phi(x)$ y $f_{p,i}$ (Bernstein, Greene & Kruskal, 1957), obtenemos

$$f_{tr,i}(w) = \frac{\sqrt{-w}}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{[f_{p,i}^{(+)}(w') + f_{p,i}^{(-)}(w')]}{\sqrt{w'(w'-w)}} dw' + \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} \int_0^{-w} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{d^2\phi}{dx^2} \right) \frac{d\phi}{\sqrt{-w-\phi}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} \int_0^{-w} \frac{e^{-\frac{\phi}{\theta}} d\phi}{\sqrt{-w-\phi}} \quad (2)$$

Basándonos en la ley de la conservación de la energía de las partículas en un campo electrostático, la distribución de los iones libres lo describe la siguiente función

$$f_{p,i}^{(\pm)}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(\sqrt{w \pm M})} \quad (3)$$

la cual, cuando $\phi \rightarrow 0$ adopta la forma de la distribución de Maxwell.

La magnitud $M = \frac{V_0}{\sqrt{2V_{Ti}}}$ es un

análogo al número de Mach para los agujeros iónicos.

Emplearemos un potencial de la siguiente forma

$$\phi(x) = \varphi \operatorname{sech}^2\left(\frac{2x}{\delta}\right), \quad (4)$$

la que conlleva a la más simple expresión para f_{tr} . Un análisis cualitativo de los resultados del estudio de las propiedades de los

agujeros fásicos por el método BGK muestra que estos prácticamente no dependen de la forma solitónica del potencial $\phi(x)$ (Turikov, 1984).

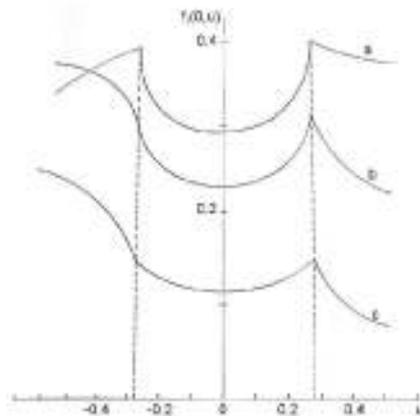
Reemplazando (3) y (4) en la parte derecha de (2) y llevando a cabo la integración obtenemos

$$f_{tr,i}(w) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} e^{-w-M^2} \left\{ \cos(2\sqrt{-w}M) + \frac{2}{\pi} e^{M^2} \left[D(M) \operatorname{sen}(2\sqrt{-w}M) - \int_0^{\sqrt{-w}} e^{y^2} \cos 2M(y - \sqrt{-w}) dy \right] \right\} + \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} \frac{32}{\delta^2} \sqrt{-w} \left(1 + \frac{2W}{\varphi}\right) - \frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\theta}} D\left(\sqrt{\frac{-w}{\theta}}\right) \quad (5)$$

Donde $D(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{y^2} dy$ es el integral de Dawson.

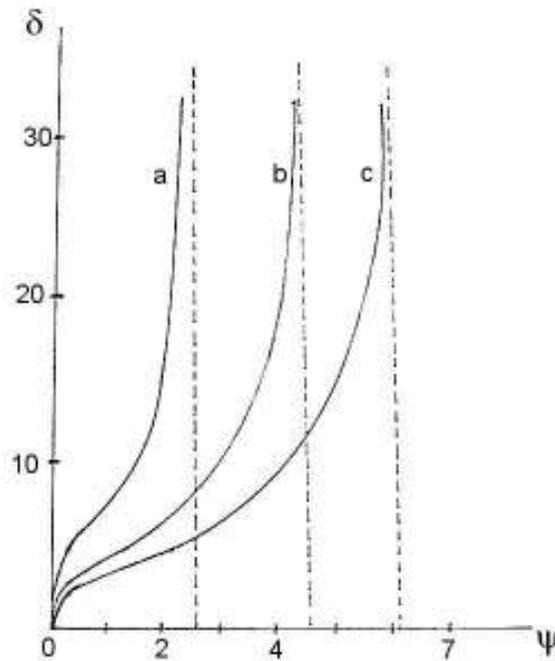
La figura 1 muestra los gráficos de las funciones de distribución (3) y (5) por velocidades en el centro del agujero fásico iónico.

Figura 1. Distribución de los iones en el centro del agujero fásico iónico, para diferentes valores del número de Mach. a) $M = 0.0$, b) $M = 0.5$, c) $M = 1.0$; $\varphi = 0.04$; $\delta = 50.0$; $\theta = 3.0$



En la figura 2 se ilustra la dependencia obtenida en nuestra teoría entre el ancho del agujero iónico y su amplitud, la que se encuentra en completa correspondencia con todos los resultados experimentales y de la modelación numérica (Turikov, 1984; Iisuka & Tanaca, 1987).

Figura 2. Dependencia del ancho del agujero iónico con respecto a su amplitud. a) $M = 1.0$, b) $M = 1.5$, c) $M = 2.0$; $\theta = 10.0$.



Pasemos ahora al estudio de la estabilidad del agujero iónico de pequeña amplitud ($\varphi \ll 1, \delta \gg 1$) por el método de Lewis-Symon (1979), el cual da la posibilidad de analizar perturbaciones de longitudes de onda características, comparadas con el ancho δ de la onda BGK. Suponiendo, que la dependencia de la perturbación del tiempo (en unidades $\varpi_{pi}^{-1} \sqrt{\theta}$) tiene la forma

$$\begin{aligned} \tilde{f} &= f_1(x, v, \omega) e^{-i\omega t} \\ \tilde{\phi} &= \phi_1(x, v, \omega) e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

Las ecuaciones linealizadas de Vlasov y Poisson para el caso cuando $\frac{\phi}{\theta} \ll 1$ se puede representar en la siguiente forma

$$(-i\omega + L)f_1 = -\frac{\partial f_i}{\partial w} L\phi_1 \quad (6)$$

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - 1\right)\phi_1 = \theta \int_{-\infty}^{+\infty} f_1 dv \quad (7)$$

donde $L = v \frac{\partial}{\partial x} + \frac{d\phi}{dx} \frac{\partial}{\partial v}$ es el operador de Liouville.

Siguiendo al método de Lewis-Symon (1979), introducimos al nuevo operador del campo

$$\Lambda = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 1 + \theta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f_i}{\partial w} dv = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 1 - \theta \frac{dn_i(\phi)}{d\phi}$$

Resolviendo la ecuación (9) por el método de las características con la consiguiente integración por partes, obtenemos la siguiente ecuación

$$g(x, v, \omega) = \frac{1}{v} \frac{\partial f_i}{\partial v} \left[1 - \frac{iv}{\omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(1 - \frac{iv}{\omega} \frac{\partial}{\partial x} (1 - \dots) \right) \right] \phi_1(x, \omega) \quad (10)$$

Para mantener el valor exacto de la ecuación (10) es necesario tener en cuenta toda la sucesión de operadores diferenciales que se encapsulan uno a otro infinitamente. El cumplimiento de la condición

$\frac{v}{l|\omega|} \ll 1$ permite detener a esta sucesión en la aproximación adecuada, l es la longitud característica de la no uniformidad de la perturbación ϕ_1 . Para poder valorar procesos del tipo de las inestabilidades a doble flujos, es necesario en la ecuación (10)

mantener miembros con $\frac{\partial}{\partial x}$ inclusive hasta del cuarto orden. Señalemos que en el trabajo de

y a la nueva perturbación de la función de distribución

$$g(x, v, \omega) = f_1(x, v, \omega) + \phi_1(x, \omega) \frac{\partial f_i}{\partial w}$$

Entonces las ecuaciones (6) y (7) se transforman y toman la siguiente forma

$$(-i\omega + L)g = -\omega \frac{\partial f_i}{\partial w} \phi_1, \quad (8)$$

$$\Lambda \phi_1 = \theta \int_{-\infty}^{+\infty} dv g \quad (9)$$

Shamel [14] el análisis de las inestabilidades del agujero iónico se realizó únicamente hasta el segundo

orden por el valor de $\frac{v}{l|\omega|}$.

La perturbación del potencial ϕ_1 es muy cómodo descomponerlo por las funciones propias del operador del campo Λ . Para el perfil del potencial escogido, la ecuación para las funciones propias η_j de este operador toma la forma de la siguiente ecuación de Schrödinger:

$$\frac{d^2 \eta_j}{dx^2} + (E_j + V_0 \sec h^2 \alpha x) \eta_j = 0 \quad (11)$$

donde $\alpha = \frac{2}{\delta}$, $E_j = \lambda_j - 4\alpha^2$, λ_j son los valores propios de Λ , $V_0 = 12\alpha^2$. Reduciendo a la ecuación (11) con ayuda de cambios

de variables estándares a la ecuación hipergeométrica, encontramos las funciones propias, que satisfacen las condiciones límites finitas cuando $x = 0$ y cuando $x \rightarrow \pm\infty$;

$$\eta_j(x) = \sec h^3(\alpha x) F(-j, j-3, \frac{1}{2}; -sh^2\alpha x), j = 0, 1, 2, \dots, \quad (12)$$

donde $F(a, b, c; z)$ es la función hipergeométrica. Supondremos que la onda normal $\phi_1(x, \omega)$ la describe con suficiente exactitud la función propia (12) de menor energía

$$\eta_0(x) = \sec h^3\alpha x$$

Considerando que $\phi_1 \approx \eta_0(x)$, reemplazando (10) en (9), multiplicando a la ecuación obtenida por $\eta_0(x)$ e integrando por x desde $-\infty$ hasta el $+\infty$, obtenemos la siguiente relación de dispersión:

$$\lambda_0 \frac{16}{15\alpha} + \theta \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dv \frac{1}{v} \frac{\partial f_i}{\partial v} \eta_0 \left(1 - \frac{iv}{\omega} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{v^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{iv^3}{\omega^3} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{v^4}{\omega^4} \frac{\partial^4}{\partial x^4} \right) \eta_0(x) = 0$$

Después de integrar esta expresión, teniendo en cuenta las expresiones (3) y (5) cuando $M \ll 1$, ella toma la siguiente forma aproximada

$$(1 + 1.29\alpha^2)\omega^4 + 1.29\theta\alpha^2 \left(1 - 1.11 \frac{\varphi}{\theta} \right) \omega^2 - 16.73\theta\alpha^4 (1 + 1.42\varphi + 2M^2) = 0 \quad (13)$$

Una de las soluciones de la ecuación (13) es una magnitud imaginaria pura con un valor $\text{Im } \omega \equiv \gamma > 0$. Ella corresponde a la evolución de una inestabilidad aperiódica con un incremento

$$\gamma = 3.6\alpha \left(1 + 0.71\varphi + M^2 + 0.56 \frac{\varphi}{\theta} \right)$$

3. CONCLUSIONES

De esta forma, llegamos a la conclusión de que un agujero iónico de pequeña amplitud ($\varphi \ll 1, \delta \gg 1$) es inestable con respecto a pequeñas perturbaciones en forma de ondas normales en la región de su localización. El resultado obtenido no contradice la existencia de los agujeros iónicos estables observados en los

experimentos de laboratorio y numéricos, ya que en estos casos $\varphi \geq 1$, lo que no concuerda con nuestra aproximación. En lo que respecta a los resultados del trabajo de Shamel (1982b), donde se afirma que el agujero iónico de pequeña amplitud es estable en el caso unidimensional; basándonos en el análisis realizado se deduce que son incorrectos.

4. BIBLIOGRAFIA

- [1] SINGH N., SCHUNK R.W. //Plasma Phys.-1984.-**26**.-859.
- [2] SAKANAKA P.H.//Phys. Fluids.-1972.-**15**.-1223.
- [3] DUPREE T.H. Theory of phase-space density holes //Phys. Fluids.-1982.-**25**.-277-289.
- [4] SHAMEL H. The theory of double layers //Symp. on Plasma Double Layers, Risø,-1982.-13-39.
- [5] PECSELI H.L., AMSTRONG R.J., TRULSEN J.//Phys. Lett.-1981.-**81A**.-386.
- [6] BERNSTEIN I.B., GREENE J.M., KRUSKAL N.D. Exact nonlinear plasma oscillations //Phys.Rev.-1957.-**108**.-546.
- [7] SHAMEL H., BUJARBARUA S. Solitary plasma hole via ion-vortex distribution //Phys. Fluids.-1980.-**23**.-2498-2439.
- [8] MEYERSON B.I., ROGACHEVSKIY I.B. Solitones iono-acústicos y agujeros electrónicos en plasmas con corrientes //Física Plasmi (en ruso).-1987.-**13**.-495.
- [9] SAGDIÉYEV R.Z.//Voprosi teori plasmi.(en ruso)-1964.-**4**.-45.
- [10] BUJARBARUA S., SHAMEL H. Theory of finite-amplitude electron and ion holes //Journ. Plasma Phys.-1981.-**25**.-515-529.
- [11] TURIKOV V.A. Electron phase space holes as localized BGK solutions //Phys. Scripta.-1984.-**30**.-73-77.
- [12] IISUKA S., TANACA H. Mach number limit of electron holes in bounded beam-plasma system //Plasma Phys. Contr. Fusion-1987.-**29**.-133-143.
- [13] LEWIS H.R., SYMON K.R. Linearized analysis of inhomogeneous plasma equilibria. General theory //Journ. Math. Phys.-1979.-**20**.-413-436.
- [14] SHAMEL H. Linear modes in the presence of solitary ion holes //Phys. Lett.-1982.-**89A**.-280-282.