

# Determinación de masas de núcleos pesados a partir del Spin -F

## Heavy nuclei mass calculation using F- Spin

Armando Tuñón <sup>1\*</sup>, Abdoulaye Diallo <sup>1</sup>

<sup>1</sup> Facultad de Ciencias y Tecnología, Universidad Tecnológica de Panamá  
armando.tunon@utp.ac.pa, abdoulaye.diallo@utp.ac.pa

**Resumen**— Usando el Spin-F del Modelo de Interacción Bosónica 2 (IBM-2) [8, 13], y la parametrización propuesta por E. D. David, B. R. Barrett y A. F. Diallo [11, 14], se estiman las masas de núcleos semi-pesados y pesados par-par en la región  $50 \leq Z \leq 82$ ,  $82 \leq N \leq 126$ . No obstante la simplicidad del modelo, los resultados son bastante precisos en toda la región, lo que da optimismo en su uso para el caso de otros núcleos lejos de la línea de estabilidad, en particular cerca de la línea de goteo.

**Palabras claves**— Energía de Enlace, Modelo de Interacción Bosónica, Espín F.

**Abstract**— The F spin as introduced in the Interacting Boson Model 2 (IBM-2) [8, 13] is used as proposed by E. D. David, B. R. Barret y A. F. Diallo [11, 14] to determine the masses of medium to heavy even-even nuclei in the region  $50 \leq Z \leq 82$ ,  $82 \leq N \leq 126$ . This simple model yields very goods results, a fact that encourages it usage for other nuclei far from the stability, particularly along the drip line.

**Keywords**— Binding Energy, Interacting Boson Model, F-Spin.

**Tipo de Artículo:** Original

**Fecha de Recepción:** 21 de abril de 2017

**Fecha de Aceptación:** 25 de septiembre de 2017

### 1. Introducción

El estudio de las estructuras nucleares representa un campo fértil de aprendizaje que se ha desarrollado durante décadas.

El núcleo es una estructura formada por partículas (protones y neutrones) colectivamente llamadas nucleones. Se trata de una pequeña sociedad donde la interacción entre sus miembros crea un rico y diverso conjunto de propiedades. Esta interacción es dominada por la llamada fuerza nuclear fuerte, con un aporte de la fuerza electromagnética que aumenta con el número de protones también conocido como número atómico (Z).

Se necesita un estudio sistemático del núcleo para establecer regularidades en sus propiedades. Estas propiedades pueden ser descritas mediante modelos que simulan algunos de los atributos reales de los núcleos. Uno de los modelos más exitosos, es el modelo de capas, el cual sirvió de marco para entender muchas de las características más sobresalientes del núcleo, particularmente las propiedades de los núcleos con pocos nucleones de valencia.

El modelo nuclear de la gota líquida explica de manera sencilla algunas propiedades colectivas del núcleo, así como el mecanismo de reacciones nucleares a baja energía. Esta es una descripción macroscópica que no considera las propiedades individuales de los nucleones.

En este modelo, el núcleo se asimila a una gota líquida y los nucleones desempeñan el papel de las moléculas en el líquido. Las moléculas están ligadas por fuerzas de tipo de Van der Waals, mientras que los nucleones por fuerzas nucleares.

El modelo conduce a una ecuación semi-empírica de la masa (fórmula de Weizsäcker), y sirve para calcular la energía de enlace en función de solo dos parámetros, Z (número atómico que corresponde al número de protones presentes en el núcleo), A (número de protones y neutrones presentes en el núcleo) y es dada por:

$$BE(Z,A) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_{as} \frac{(A-2Z)^2}{A} \pm \delta(A) \quad (1)$$

donde  $BE$  representa la energía de enlace (Binding Energy en Inglés) los otros los términos corresponden a los efectos de volumen  $a_v$ , superficie  $a_s$ , repulsión Coulombiana  $a_c$ , simetría  $a_{as}$  y apareamiento  $\delta$  respectivamente. La energía de enlace de los núcleos es uno de los parámetros que más informaciones provee sobre sus propiedades. Esta energía nos permite, por ejemplo, predecir la estabilidad de los núcleos y sus modos de decrecimiento.

En nucleosíntesis, los científicos tienen una necesidad imperativa de estimar la energía de enlace sobre todo para núcleos que están lejos de la línea de estabilidad y a veces cerca de las líneas de goteo tanto protónica como neutrónica. Esto, con miras a un mejor entendimiento del proceso  $r$  (que provoca las capturas rápidas de neutrones en estudio de nucleosíntesis en la Astrofísica) de generación de los elementos.

Los diferentes coeficientes de la ecuación (1) se determinan mediante ajustes a los datos experimentales. Tales valores han sido refinados con el tiempo y la tabla 1 muestra los resultados obtenidos por los investigadores más comúnmente citados:

**Tabla 1.** Valores empíricos de los coeficientes de la fórmula de Weizsäcker

	$N, Z$	Handbuch [1]	Wapstra [2]	Rohlf [3]
$a_v$ (MeV)		15.8	14.1	15.8
$a_s$ (MeV)		23.2	19.0	23.7
$a_c$ (MeV)		0.714	0.595	0.711
$a_{as}$ (MeV)		23.2	19.0	23.7
$\delta(A)$	par, par	$\frac{+11.2}{A^{1/2}}$	$\frac{+33.5}{A^{3/4}}$	$\frac{+11.2}{A^{1/2}}$
	par, impar impar, par	0	0	0
	impar, impar	$\frac{-11.2}{A^{1/2}}$	$\frac{-33.5}{A^{3/4}}$	$\frac{-11.2}{A^{1/2}}$

El quinto y último término de la ecuación (1) corresponde a la energía de apareamiento. Este término dado por la ecuación (2), representa una corrección que aparece por la tendencia que poseen los neutrones y protones de estar apareados de dos a dos. La estabilidad disminuye para  $N, Z$  impar y es mínima para los núcleos impar-impar. Esta contribución es dada por:

$$\delta(A) = \pm \frac{a_{ap}}{A^{1/2}} = \pm \frac{a'_{ap}}{A^{3/4}} \quad (2)$$

Se utiliza el signo positivo para los núcleos par-par, negativo para los núcleos impar- impar y se anula para

los núcleos impar-par o par- impar es decir un número de masa  $A$  impar. Las constantes  $a_{ap}$  y  $a'_{ap}$  son empírica y tienen los valores que se muestran en la tabla 1 según cada autor.

Los núcleos más estables tienen un número par de protones y neutrones, cuyo efecto también se refleja en su abundancia natural. La tabla 2 [4] a continuación, muestra la relación entre la abundancia de núcleos estables en la naturaleza y la paridad en el número de protones y de neutrones.

**Tabla 2.** Isótopos estables conocidos según la paridad de los números de protones y de neutrones

Protones	Neutrones	No. de isótopos estables
impar	impar	4
impar	par	50
par	impar	53
par	par	157

La ecuación (1) no considera el efecto de los números mágicos, lo cual constituye una limitante en este modelo para los núcleos ligeros (especialmente en el caso del  $^4\text{He}$ ) o de pocos nucleones de valencia, pero proporciona ajustes buenos para los núcleos deformados.

La discrepancia en el valor experimental de la energía de enlace y la ecuación (1) es más pronunciada para los números de protones o neutrones específicamente para: 20, 28, 50, 82, y 126. Estos constituyen los números mágicos en estructuras nucleares. Este es el efecto capas que no puede ser explicado por el modelo de la gota líquida. Uno de los modelos que nos permite estimar las energías de enlace de los núcleos es el IBM-2 (Interacting Boson Model). Se usan entonces los números de bosones protónicos y neutrónicos de valencia ( $N_\pi$  y  $N_\nu$ ) para determinar las energías de Enlaces y por consecuencia, las masas nucleares. Se ha usado este modelo para el cálculo de BE de núcleos individuales, y en [5], se sistematiza este formalismo usando el spin  $F$  para determinar las masas nucleares para una amplia región de la tabla periódica, específicamente  $50 < Z < 82$ ,  $82 < N < 126$ .

En el IBM-2, el concepto del espín  $F$  facilita la discusión de la simetría protón – neutrón, asociados a estos grados de libertad. Los estados pueden clasificarse en términos del número de bosones como número cuántico, de modo que el sistema tiene un total de estados de spin  $F$  que cumplen con la siguiente

condición  $F_z \leq F \leq F_m$ ,  $F_m = (N_\pi + N_\nu)/2$  y  $F_z = (N_\pi + N_\nu)/2$ .

La idea aquí es usar este formalismo para determinar las masas de los núcleos de la región donde existen datos experimentales y extenderlo a los núcleos que se encuentran lejos de la línea de estabilidad o cercanas a la línea de goteo tanto neutrónica como protónica.

## 2. Aplicación del espín F y fórmula de masa

Una consecuencia de la invariancia del spin F es la existencia de múltipletes de spin F. Estos múltipletes constarán de núcleos que tienen el mismo número total de bosones de valencia pero diferentes valores de  $F_z$ . En virtud de que  $[H, F \odot F] = 0$ , el Hamiltoniano tiene autovalores degenerados por lo que se puede escribir  $E(F_m, F_z) = E(F_m)$ , lo cual conduce a una dependencia parabólica, es decir:

$$BE(F_m, F_z) = E_0(F_m) + E_1(F_m)F_z + E_2(F_m)F_z^2, \quad (3)$$

La energía de enlace que representa los autovalores del Hamiltoniano dada por (3), puede ser generalizada mediante el funcional:

$$BE(F_m, F_z) = \theta_1 + \theta_2 F_m + \theta_3 F_m^2 + \theta_4 F_z + \theta_5 F_z^2 + \theta_6 F_m F_z \quad (4)$$

donde los coeficientes  $\theta_k$  son parámetros a determinar.

Este modelo teórico fue propuesto original y fenomenológicamente por E. D. David, B. R. Barret y A. F. Diallo [11, 14] para núcleos par-par en la región de la tabla periódica  $50 \leq Z \leq 82$ ,  $82 \leq N \leq 126$ .

## 3. Esquema de regiones y Energía de enlace

Para determinar los coeficientes y verificar las limitaciones del modelo propuesto, los núcleos con  $N$  y  $Z$  par-par seleccionados son clasificados según el esquema descrito a continuación. La información de datos experimentales para la energía de enlace, es tomada de las dos fuentes más actualizadas que disponemos: [6, 8].

Estos núcleos se han subdividido en regiones  $R_{\pi\nu}$  bosón protón – bosón neutrón según el número de bosones de valencia relativo a los números mágicos específicamente para  $50 \leq Z \leq 102$  y  $50 \leq N \leq 162$ . Esto genera una muestra de 451 núcleos para los cuales se tenía acceso a datos experimentales.

El esquema se representa en la figura 1, donde se aprecian las subregiones identificadas en código de colores y símbolos para las configuraciones: pp

(partícula- partícula), ph (partícula- hueco), hp (hueco- partícula) y hh (hueco- hueco).

Los números mágicos para nucleones ya sean protones o neutrones son: 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126 y 184, y muestran los cierres de capas nucleares. Para los bosones protónicos de 50 hasta 82, la primera mitad se clasifica como partícula (p) y abarca de 50 a 66, mientras que la segunda mitad como hueco (h) abarca de 66 hasta 82. De igual forma se precede con los bosones neutrónicos de manera que se generan regiones  $R_{\pi\nu}$  en formato matricial. La región por ejemplo  $R_{12}$  corresponde a una sección de configuración: "partícula" para bosón protónico y "hueco" para el bosón neutrónico es decir ph (partícula-hueco) para núcleos con  $50 \leq Z \leq 66$  y  $66 \leq N \leq 82$ .

Las capas nucleares están definidas por los números mágicos, de manera que desde 50 hasta 82 por ejemplo, existe una capa nuclear que contiene una configuración "partícula" y otra "hueco" para los bosones ya sea protónico y neutrónico, lo que significa, que cada región  $R_{\pi\nu}$  representa una cuarta parte de la capa nuclear, i.e. una capa nuclear contiene las configuraciones pp (partícula-partícula), hp (hueco-partícula), ph (partícula-hueco) y hh (hueco-hueco).

La muestra de datos recolectados también fue organizada por capas  $C_{\pi\nu}$  según el número mágico (ver Figura 2), donde por ejemplo  $C_{21}$ , define una capa nuclear con bosones protónicos y neutrónicos en el rango:  $82 \leq Z \leq 126$  y  $50 \leq N \leq 82$ .

El propósito de esta estructuración tiene la finalidad de analizar la correlación entre regiones de la misma capa analíticamente y verificar las limitaciones del modelo en una misma capa.

Se depuró la muestra eliminado aquellos núcleos con un número de bosones protónicos y neutrónicos iguales a cero por estar cercanos al cierre de las capas.

## 4. Resultados

Se procesaron las regiones individualmente con muestras significativas, donde aquí solo se muestran los resultados de las regiones específicamente R24, R11 y R35 en el esquema de la figura 1. Las tablas 3, 4 y 5 aparecen identificados los núcleos y las cadenas de isótopos en las regiones mencionadas.

Los análisis gráficos comparando el ajuste del modelo teórico y los valores experimentales para cada región específica aparecen en las figuras 3, 4 y 5. Los ajustes teóricos para a energía de enlace  $BE(F_m, F_z)$

es representada por (4), donde finalmente los coeficientes  $\theta_k$  están organizados en la tabla 6.

Para la correlación de las regiones para una misma capa, basada en el esquema de la figura 2, se realiza un ajuste para las regiones de una misma capa cuando hay

suficientes datos, específicamente C12. La tabla 6, se muestran los resultados obtenidos para cada región y capa específica. A futuro se quiere incluir todas las regiones en un solo ajuste.

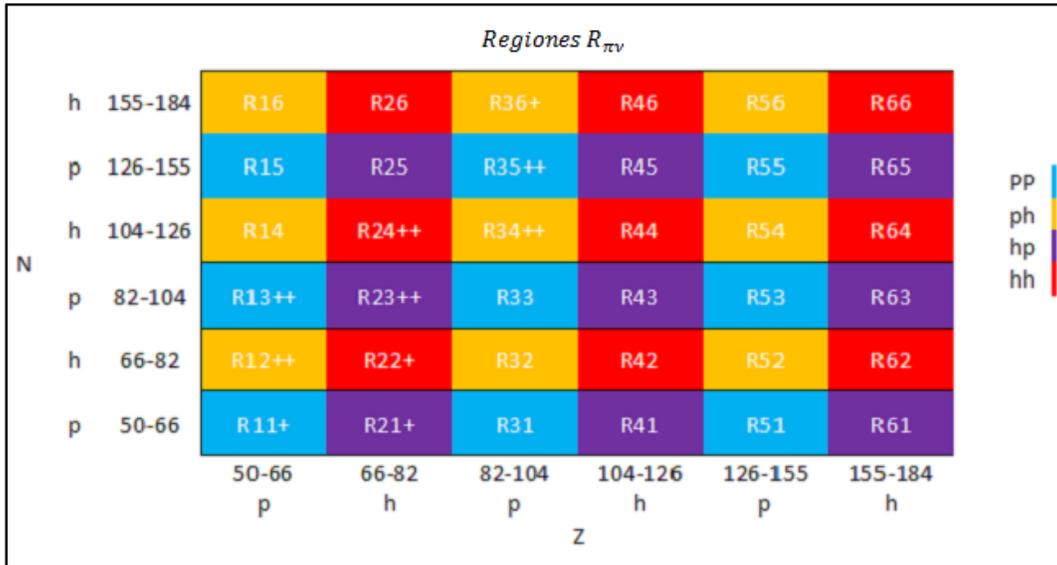


Figura 1. Esquema de Regiones de bosones protónicos y neutrónicos. Los signos + y ++ indican que son muestra significativa de datos para núcleos par-par.

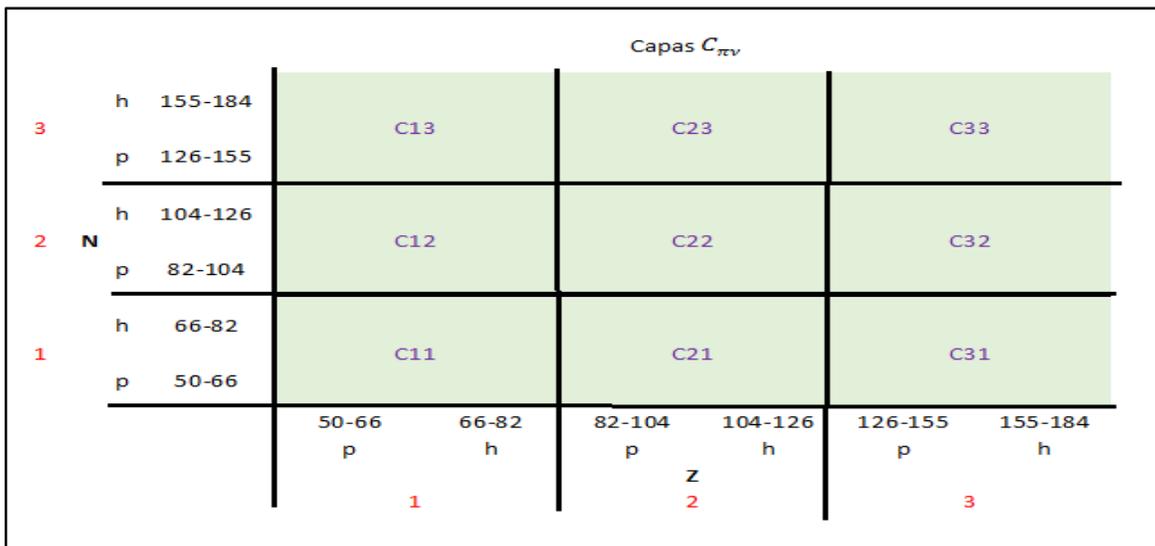


Figura 2. Esquema de Capas de bosones protónicos y neutrónicos.

#### 4.1 Región R24

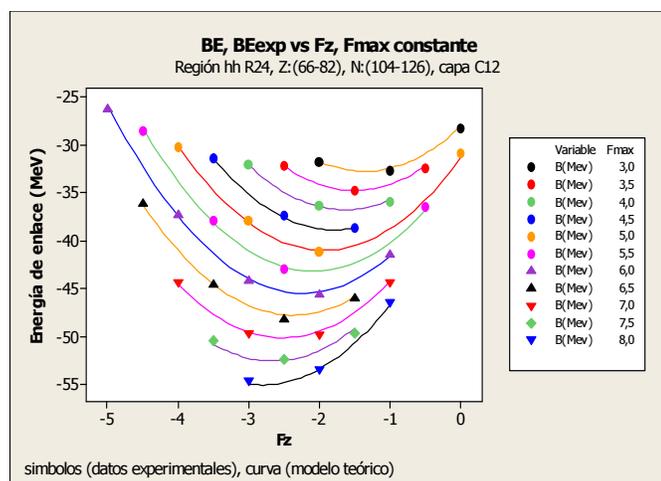
En la región, se analizaron un total de 39 núcleos pertenecientes a 7 cadenas de isótopos de tipo hueco-hueco, se muestran en la tabla 3, dando el ajuste un error estándar de 0,28%.

La figura 3, muestra los resultados del modelo teórico (curva continua) y los valores experimentales (puntos) donde se puede observar que las curvas de ajustes para cada  $F_{max}$  convergen con los puntos

experimentales y su característica parabólica es bien acentuada.

**Tabla 3.** Núcleos analizados en región R24

Elemento	Símbolo	cantidad
Erbio	Er	1
Iterbio	Yb	3
Hafnio	Hf	7
Wolframio	W	4
Osmio	Os	9
Platino	Pt	8
Mercurio	Hg	7
		Total 39



**Figura 3.** Energía calculada (línea continua) vs datos experimentales en la región hh R24- capa C12.

#### 4.2 Región R11

Para esta región R11 cuya configuración es del tipo partícula- partícula, se analizaron las 4 cadenas de isótopos mostrados en la tabla 4.

La gráfica de la figura 4, muestra los resultados del modelo teórico con los valores experimentales de la energía de enlace en función de la proyección del Spin F, con un error estándar de 0,13%.

Otro aspecto relevante en los resultados gráficos de los 10 núcleos analizados para  $50 \leq Z \leq 66$ ,  $50 \leq N \leq 66$  es la tendencia cuadrática del modelo propuesto por (4) para la energía de enlace  $BE$  en MeV.

Las 3 curvas del modelo teórico están definidas para valores constantes del Spin F con  $F_m = 2,5$ ;  $3,0$  y  $3,5$ .

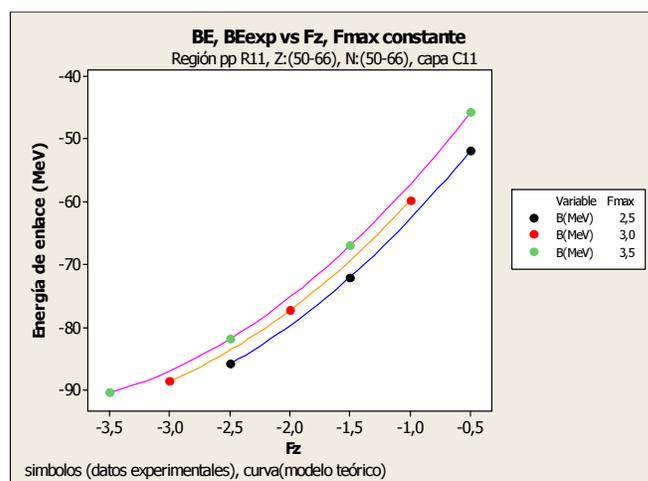
**Tabla 4.** Núcleos analizados en región R11

Elemento	Símbolo	cantidad
Estaño	Sn	3
Telurio	Te	3
Xenón	Xe	3
Bario	Ba	1
		Total 10

#### 4.3 Región R35

Esta región es de configuración partícula- partícula y fueron analizadas 10 cadenas de isótopos con un total de 79 núcleos mostrados en la tabla 5.

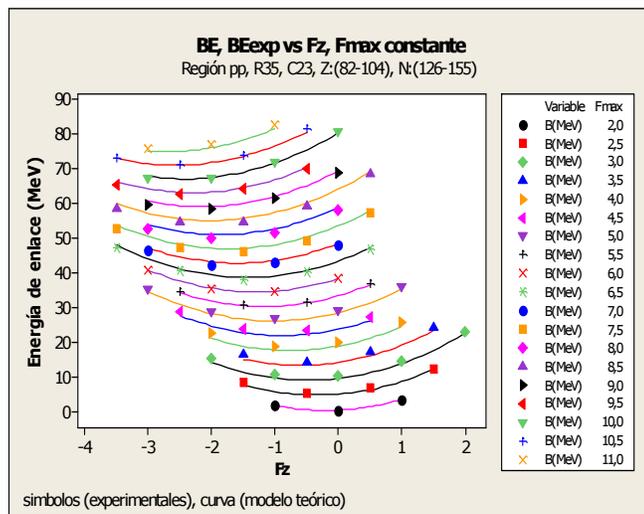
El resultado de la región R35 se muestra a continuación en la figura 5, con un error estándar de 0,83% definida para  $82 \leq Z \leq 104$ ,  $126 \leq N \leq 155$ .



**Figura 4.** Energía calculada (línea continua) vs datos experimentales en la región pp R11- capa C11.

**Tabla 5.** Núcleos analizados en región R35

Elemento	Símbolo	cantidad
Polonio	Po	3
Radón	Rn	7
Radio	Ra	10
Torio	Th	2
Mercurio	Hg	21
Plutonio	Pu	10
Curio	Cm	9
Californio	Cf	8
Fermio	Fm	6
Nobelio	No	3
		Total 79

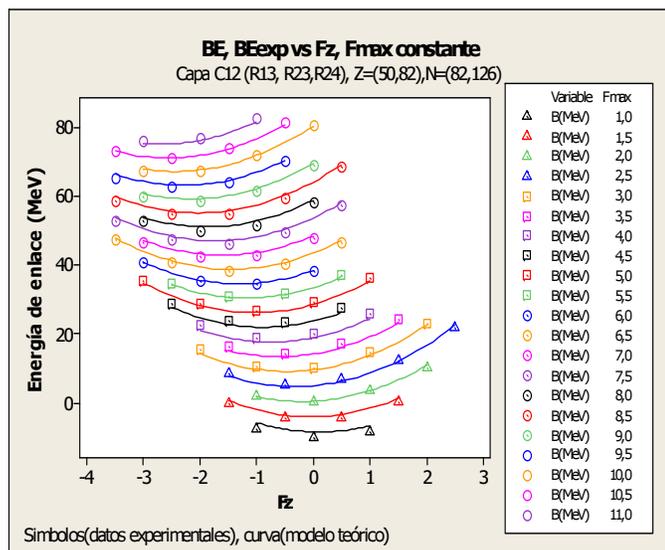


**Figura 5.** Energía calculada (línea continua) vs datos experimentales en la región pp R35- capa C23.

#### 4.4 Correlación entre regiones para C12

Se realizó un ajuste en el caso particular de la capa C12 que está integrada por las regiones R13, R23 y R24.

El análisis gráfico se muestran en la figura 6, con un error estándar de 1.09% e incluye un mayor número de núcleos con configuraciones de partícula-hueco variadas para  $50 \leq Z \leq 82$ ,  $82 \leq N \leq 126$ .



**Figura 6.** Energía calculada (línea continua) vs datos experimentales en la capa C12.

Los resultados de los ajustes para los coeficientes de la ecuación (4) en forma resumida, se presentan en la tabla 6 para las regiones analizadas con núcleos par-par

en la región  $50 \leq Z \leq 102$  y  $50 \leq N \leq 162$ . La cantidad de cifras significativas es consistente con datos obtenidos de “The Ame2003 atomic mass evaluation” [6], correspondientes a los valores experimentales de energía de enlace  $BE$  en keV, para los elementos de la tabla periódica. Esta fuente de datos experimentales fue actualizada y comparada con otra fuente: “The NUBASE2012 evaluation of nuclear properties.”[8], publicada en 2012 en Chinese Physics C.

Es de notar que el error estándar es en todos los casos no pasa de 1%, lo que representa un resultado excepcional cuando se describen más de 400 núcleos en diferentes regiones de la tabla periódica.

Este acuerdo con los datos experimentales presagian de la validez del modelo en su uso para regiones lejos de las líneas de estabilidad. Este es particularmente útil para estudios de nucleosíntesis donde no se disponen de valores medidos de las masas nucleares y se intenta tener alguna idea de sus valores.

Queda todavía unificar todas estas regiones en una transformación de similitud partícula-hueco que permita la descripción del conjunto con un solo *set* de valores de los coeficientes de (4) para la energía de enlace  $BE(F_m, F_z)$ .

#### 5. Conclusiones

Los núcleos seleccionados fueron organizados en regiones y capas según la naturaleza de los bosones de valencia y su ubicación en la tabla periódica. Se aplicó el funcional propuesto por el modelo teórico para la energía de enlace en función de los parámetros  $F_m, F_z$ .

Los resultados obtenidos presentan errores estándar bastante aceptables, mostrando una aproximación excelente de los valores de energía de enlace comparados con los datos experimentales.

En cuanto a la correlación de regiones en una misma capa, específicamente C12 que contiene 3 regiones, R24 hh (39), R23 hp (66) y R13 pp (46) para un total de 151 núcleos se obtuvo un funcional para toda la capa con un error estándar de 1,09%.

Se ha hecho uso de una expresión analítica que puede describir la masa de los núcleos en función de su contenido en *spin* F, donde se ha verificado su funcionamiento en la región de núcleos pesados y presumimos que se pueden hacer predicciones a lo largo de las líneas de goteo y del proceso r en el estudio de Nucleosíntesis en la Astrofísica.

**Tabla 6.** Cuadro de coeficientes de energía de enlace

Capa	Región	Z,N	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$	$\theta_5$	$\theta_6$	EE(%)
C11	R12	ph	-74,3550	-12,5840	2,6341	-2,5436	0,2364	1,3786	0,1436
	R11	pp	-61,0870	10,0464	-0,5788	23,7984	3,1367	1,0323	0,1282
C12	R24	hh	-21,5433	-2,4897	0,1026	2,5096	2,5594	1,4837	0,2833
	R23	hp	59,5781	-33,1569	-2,1780	-13,2715	0,2402	1,2915	0,3728
	R13	pp	-75,0612	1,2602	-0,0391	-16,6486	2,7078	1,7137	0,3133
C22	R34	ph	-21,6738	2,4530	1,7902	6,9971	0,3018	1,0051	0,0935
C23	R35	pp	-17,2542	8,5928	0,1172	-1,8259	2,1990	1,2823	0,8317
C12	R13,R23, R24	pp,hp,hh	-17,1012	8,4992	0,1240	-1,6595	2,2151	1,2462	1,0934

## 6. Referencias

- [1] Handbuch der Physik, XXXVIII/1. *Äußere Eigenschaften der Atomkerne. / External Properties of Atomic Nuclei. Gebundene Ausgabe – 1958 pp. 10-39.*
- [2] Wapstra, A. H. *Atomic Masses of Nuclides. External Properties of Atomic Nuclei.* Springer, 1958, pp. 1–37. doi: 10.1007/978-3-642-45901-6\_1. ISBN 978-3-642-45902-3.
- [3] Rohlf, J. W. *Modern Physics from  $\alpha$  to Z $\alpha$ .* John Wiley & Sons. 1994, ISBN 978-0471572701.
- [4] Pignanelli F. Web Química General.[en línea], [http://quimica-gral.blogspot.com/2011/01/patrones-de-estabilidad-nuclear\\_28.html](http://quimica-gral.blogspot.com/2011/01/patrones-de-estabilidad-nuclear_28.html) [Consulta: 2 abril 2015].
- [5] Gabriele E. Korner. Web NUPEX (Nuclear Physics Experience). Physick Department, Technische Universitat Munchen, Germany. [en línea]. <http://nupeu.eu/index.php?g=textcontent/nuclearapplications/nuclearinmed&lang=nl> [Consulta: 2 abril 2015]
- [6] G. Audi, A. H. Wapstra, C. Tribault. “The Ame2003 atomic mass evaluation.” *Nuclear Physics A*, Vol. 729, Issues 1, Dec. 2003, pp 337-976.
- [7] César Barbero, Jorge G. Hirsch, Alejandro E. Mariano. “Deformation and shell effects in nuclear mass formulas.” *Nuclear Physics A*, Vol. 874, January 2012, pp 81-97.
- [8] G. Audi, F. G. Kodev, M. Wang, B. Pfeiffer, X. Sun, J. Blachot, M. MacCormick, “The NUBASE2012 evaluation of nuclear properties.” *Chinese Physics C*, Vol. 36, No. 12, Dec. 2012, pp 1157-1286.
- [9] B.R. Barrett, E. D. Davis and A.F. Diallo. “g-boson panacea for magnetic properties of the nuclear groundstate band.” *Phys. Lett. B*. Vol. 295. Issue 1-2, Nov. 1992, pp 5-10.
- [10] A. F. Diallo. “F-spin study of rare-earth nuclei using F-spin multiplets and angular momentum projected intrinsic states.” Ph.D Thesis. University of Arizona, Tucson. U.S. May 1993.
- [11] C. K. Lin and L. Zamick. “Variation after projection in the weak deformation limit.” *Phys. Rev. C*. Vol. 23, Art. 2338. May 1981.
- [12] D. Bonatsos. *Interacting Boson Models of Nuclear Structure.* 1<sup>st</sup> Ed. Oxford Science Publications, Oxford. 1988, pp 1-129.
- [13] A. F. Diallo, E. D. David and B.R. Barrett. “An Improved Asymptotic Realization of the Projected Intrinsic State Approximation in IBM.” *Annals of Physics*. Vol. 222, Issue 2, Mar 1993, pp 159-186.
- [14] A. Tuñón, “Estudio sistemático de masas nucleares y fórmula de masa para núcleos pesados en la aproximación VAP-Variation After Angular Momentum Projection.” M.Sc Tesis. Universidad Tecnológica de Panamá, Marzo 2017.