Clase Red de Petri para Usos de Recursos Binarios Ordenados

Carlos A. Rovetto
Dpto. de Ciencias de la Computación
Universidad Tecnológica de Panamá
carlos.rovetto@utp.ac.pa

Tomás J. Concepción
Dpto. de Ciencias de la Computación
Universidad Tecnológica de Panamá
tomas.concepcion1@utp.ac.pa

Elia E. Cano
Dpto. de Ciencias de la Computación
Universidad Tecnológica de Panamá
elia.cano@utp.ac.pa

***Resumen*-La prevención/evitación de los bloqueos mutuos es un dominio de investigación activo que exige aplicar diversas políticas de control para hacer frente a este problema. En este artículo presentamos una subclase de Red de Petri especializada llamada *Clase red de petri para usos de recursos binarios ordenados (BORPN)* y sus principales propiedades estructurales. En esencia se trata de una clase ordinaria construida a partir de diversas máquinas de estados que comparten recursos unitarios en forma compleja, lo que permite bifurcación y procesos de unión. Su estructura reducida da ventajas que permiten el análisis de todo el comportamiento del sistema, siendo una tarea prohibitiva para grandes sistemas debido a la complejidad como los algoritmos de enrutamiento.**

Palabras claves: *Redes de Petri, clase $BORPN$, bloqueo mutuo, Sistemas de Asignación de Recursos, sifones.*

I. Introducción

El concepto de vivacidad está estrechamente relacionado con la ausencia de bloqueos en los sistemas, por lo cual la propiedad de vivacidad es aquella que establece que el sistema **debe** alcanzar todos los estados para lo que fue diseñado. Esta es una propiedad deseable en sistemas concurrentes que comparten recursos en forma simultánea, porque permite alcanzar todos los estados del sistema. Desde el punto de vista de los sistemas de asignación de recursos, el objetivo es garantizar que se alcanzarán todos los estados deseados utilizando los recursos solicitados por el sistema durante un tiempo determinado. La perspectiva de *Sistemas de Asignación de Recursos (RAS)* será utilizada para modelar los sistemas a través del modelo de Red de Petri, por lo tanto, los recursos se utilizan en forma conservadora, es decir que no se crean ni se destruyen. Un bloqueo mutuo se produce si un estado del sistema se vuelve infinitamente inalcanzable por una solicitud de recursos sin respuesta. Como se sabe, una red de Petri es una técnica formal, gráfica y ejecutable para la especificación y análisis de sistemas dinámicos de eventos discretos concurrentes. En este trabajo, la vivacidad se garantizará utilizando el modelado y análisis de las Redes de Petri porque los bloqueos mutuos se producen con más frecuencia en los sistemas con concurrencia, que son mejor descritos por las Redes de Petri. Además, las posibilidades de modelado de las redes de Petri no están limitados por la tecnología debido a que es un modelo matemático con una representación gráfica utilizando un grafo bipartito. Normalmente, la manera de sintetizar y analizar sistemas concurrentes utilizando Redes de Petri es a través de las subclases con fortalezas para abordar problemas específicos. Por lo tanto, vamos a definir una subclase de las redes de Petri llamado *Clase Red de Petri para Usos de Recursos Binarios Ordenados (BORPN)* que es una subclase de clases previamente existentes que han sido utilizados para abordar los problemas de bloqueo mutuo como el S^4PR [1] [2] y las clases de Redes de Petri ES^3PR [3].

Es bien conocido que ésta estructura reducida nos permite mejorar los algoritmos para analizar el modelo de Red de Petri, por lo tanto conciliar las habilidades que describen el modelo de Red de Petri, mientras se evitan extensos cálculos lo cual es un deseo siempre presente en la literatura. Una estrategia similar se menciona en los enfoques [4] [5] en donde se utilizaban cálculos booleanos para evitar operaciones complejas. Intuitivamente, los *Diagramas de Decisiones Binarias Ordinarias (OBDD)* se han utilizado como estructuras de datos que pueden codificar compactamente muchas funciones en dominios estructurados discretos como [6] [7]. La clase $BORPN$ es una clase especializada con una estructura reducida que enfrentan el problema de bloqueo mutuo de una amplia gama de sistemas distribuidos, en particular en los algoritmos de enrutamiento. Su estructura refuerza los algoritmos durante el proceso de análisis porque evita el gasto de memoria en las operaciones grandes de cálculo para detectar objetos estructurales como sifones.

Como muestra la muy conocida propiedad de Commoner, objetos estructurales como los sifones están estrechamente relacionados con algunas de las propiedades de comportamiento básicas de las Redes de Petri, como la vivacidad y la ausencia de bloqueos activos, en donde una parte del sistema funciona pero otra permanece bloqueada. El análisis estructural nos permite demostrar algunas propiedades como los sifones para asegurar la vivacidad del modelo, sin embargo, es un proceso muy costoso en memoria de computador o incluso, imposible debido al problema de la explosión estados. Varios métodos permiten reducir el número exponencial de cálculos como ecuaciones lineales o desigualdades, órdenes parciales, simetrías, diseño modular. Un nuevo enfoque se presenta en [8] que trabaja con objetos de nivel más alto, evitando el desperdicio memoria en los pasos intermedios. El método se apoya en la teoría de grafos a través de las manipulaciones de los subgrafos máximos fuertemente conectados de la gráfica [9]. Este artículo está organizado de la siguiente forma. Sección II incluye la definición de clase $BORPN$ y sus propiedades básicas. Para asegurar la propiedad de vivacidad de esta clase Petri Net se dedica la sección III, incluyendo un ejemplo del uso de esta clase de Petri Net través de un ejemplo de enrutamiento básico. Sección IV presenta las conclusiones y finalmente el apéndice A incluyen definiciones básicas y notaciones de las Redes de Petri lugar transición.

II. Definición de la clase y propiedades

A. *Clase Red de Petri para Usos de Recursos Binarios Ordenados*

Durante esta sección vamos a introducir la clase $BORPN$ y sus principales propiedades. Esta clase es una subclase de las clases S^4PR [1] [2] y los ES^3PR [3] de Redes de Petri, por lo tanto, todos los resultados teóricos existentes para estas redes se pueden aplicar para esta subclase, sin embargo el razonamiento contrario no es posible. La clase $BORPN$ tiene una valiosa información estructural dada por su estructura reducida que será utilizada para el análisis de las propiedades de comportamiento del modelo como la vivacidad. Estas nuevas características provienen de la restricción impuesta a las transiciones de la clase $BORPN$, porque sólo realiza operaciones $binarias$. Cada transición podría tomar o liberar recursos en forma unitaria, de forma muy similar al comportamiento de un algoritmo de enrutamiento como los de tipo $wormhole$ que solicitan y liberan los canales como recursos para transportar los mensajes en forma de cadenas de bits ó flits. La clase BORPN se define de la siguiente manera:

Definición 1 (La clase de Red de Petri de Recursos Binarios Ordenados)**.** *Digamos que $I_{\mathcal{N}} = \{1, 2, ..., m\}$ es un conjunto finito de índices. Una* Red de Petri de Recursos Binarios Ordenados *es una red de Petri fuertemente conectada, libre de ciclos propios $\mathcal{N} = \langle P, T, \mathbf{C}\rangle$ donde:*

1) $P = P_0 \cup P_S \cup P_R$ *es una partición tal que:*
   a) $P_S = \bigcup_{i\in I_{\mathcal{N}}} P_{S_i}$, $P_{S_i} \neq \emptyset$ *y* $P_{S_i} \cap P_{S_j} = \emptyset$, *para toda* $i \neq j$.
   b) $P_0 = \bigcup_{i\in I_{\mathcal{N}}} \{p_{0_i}\}$.
   c) $P_R = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$, $n > 0$.
2) $T = T_a \cup T_r$ *es una partición tal que:*
   a) $T_a = \bigcup_{i\in I_{\mathcal{N}}} T_{ai}, T_{ai} \neq \emptyset$, $T_a \in P_R{}^\bullet$, *para cada* $i, j \in I_{\mathcal{N}}$ $T_{ai} \cap T_{aj} = \emptyset$, *para toda* $i \neq j$
   b) $T_r = \bigcup_{i\in I_{\mathcal{N}}} T_{ri}, T_{ri} \neq \emptyset$, $T_r \in {}^\bullet P_R$, *para cada* $i, j \in I_{\mathcal{N}}$ $T_{ri} \cap T_{rj} = \emptyset$, *para toda* $i \neq j$
3) *Para toda* $i \in I_{\mathcal{N}}$, *la subred* $\mathcal{N}_i$ *generada por* $P_{S_i} \cup \{p_{0_i}\} \cup T_{ai} \cup T_{ri}$ *es una máquina de estado fuertemente conectada, tal que cada ciclo contiene* p_{0_i} *e induce un Semiflujo–T mínimo.*
4) *Para cada* $r \in P_R$ *existe un Semiflujo–P mínimo,* $\mathbf{Y}_r \in \{0, 1\}^{|P|}$, *tal que* $\{r\} = ||\mathbf{y}_r|| \cap P_R$, $\mathbf{y}_r[r] = 1$, $P_0 \cap ||\mathbf{y}_r|| = \emptyset$, *y* $P_S \cap ||\mathbf{y}_r|| \neq \emptyset$.
5) $P_S = \bigcup_{r\in P_R} (||\mathbf{y}_r|| \setminus \{r\})$.

Todo el modelo de red de Petri *BORPN* está compuesto por diversas redes *fuertemente conectadas* denotadas por $\mathcal{N}_i$ donde $i \in \mathbb{N}^*$. Una red de Petri *libre de auto-bucles* existe sii $\forall t \in T$ $|{}^\bullet t \cap t^\bullet = \emptyset$. En la figura 2 cada máquina de estado (SM) corresponde a una subred que forman una sola red de Petri *BORPN*. Debido a que los problemas de bloqueo mutuo están relacionados a estados inalcalzables producido por diversos procesos que de forma simultánea retienen y solicitan recursos generando un auto-bucle que no permite ninguna evolución de los procesos. Como muestra la definición 1 apartado 1 los lugares P son particionados en tres grupos representando el: a) los lugares de $proceso$ P_S, b) lugares $reposo$ P_{0i} representando los mensajes en espera c) $recursos$ P_R. Los lugares de recursos representan la disponibilidad del recurso y no puede ser creado o destruido por los procesos. La estructura de la clase *BORPN* impone que cada ciclo contiene los lugares desocupados P_0. Si un proceso comienza adquiere un token $reposo$ y debe terminar, por lo que el token del lugar $reposo$ debe retornar. Durante la evolución del proceso diversos recursos pueden ser utilizados, sin embargo deben ser liberados cuando el proceso finalize. La propiedad de vivacidad se busca para garantizar la terminación de los procesos y así tener el sistema libre de bloqueos mutuos. Cada proceso requiere el uso de al menos un recurso, sin embargo deben ser *adquiridos* o *liberados* en forma unitaria. Por el motivo anterior el componente $\mathbf{Y_r}$ es un vector booleano debido al comportamiento peculiar de esta red.

Las transiciones en una *BORPN* tiene un comportamiento particular siguiendo nuestra enfoque de los procesos. Nosotros consideramos que el comportamiento del proceso se asemeja a una tubería, donde puede ser particionada en unidades de proceso. La primera unidad de proceso en adquirir los recursos es la última unidad en liberarlos. Esta aproximación restringe el comportamiento de las transiciones y nos permite modelar con más fidelidad sistemas particulares a diferencia de aproximaciones tradicionales. Por lo tanto, somos capaces de modelar la transportación de objetos *(mensajes, items, etc)* a través de redes o centros de distribución de almacén. La definición 1 apartado 2 está relacionada con las transiciones que están particionadas en dos conjuntos disjuntos. Transiciones T_a y T_r que significan adquirir y liberar respectivamente, por consiguiente $\forall\{t_i, t_j\} \in T$ tanto que $|{}^\bullet t_i \cap P_R|$=1 y $|t_j^\bullet \cap P_R|$=1 donde $i \neq j$. Sin embargo, esta restricción permite ni impide las *bifurcaciones*, siendo una característica útil para representar sistemas complejos en donde se presentan problemas de bloqueos mutuos. En [10] donde se prueba que una máquina de estado fuertemente conectada $||{}^\bullet t||$=$||t^\bullet||$=1 esta viva, por lo que induce una propiedad invariante en la conservación de las marcas en los lugares. Para una *BORPN* esta propiedad, que se encuentra en la definición 1 apartado 3, donde para todos los $i \in I_{\mathcal{N}}$, la subred $\mathcal{N}_i$ generada por $\mathcal{N}_i$=$\langle P_{0_i} \cup Ps_i, T_{ai} \cup T_{ri}, \mathbf{C_i}\rangle$ donde $i$$\in$$\mathbb{N}^*$ es una máquina de estado fuertemente conectada, tal que cada ciclo contiene un lugar p_{0i}. Cada ciclo conteniendo el lugar $reposo$ cierra un circuito que induce un *Semiflujo–T* en ese camino. Finalmente en la definición 1, los apartados 4 y 5 están relacionados con las propiedades estructurales invariantes de los recursos y lugares $reposo$ respectivamente. De esta forma, para cualquier $r \in P_R$ existe un mínimo *Semiflujo–P* donde $\mathbf{Y}_r \in \{0,1\}^{|P|}$. Los lugares de proceso unidos con el recurso r son conocidos como lugares portadores $\mathcal{H}$. Estos lugares cargan la disponibilidad de los recursos mientras representan un estado de proceso, como lo muestra la definición 2.

Definición 2. *Consideremos que $\mathcal{N}$ sea una* BORPN *y P_R El conjunto de lugares de recursos. El conjunto de lugares portadores $\mathcal{H}$ de r es el soporte del Semiflujo–P mínimo sin el recurso $\mathcal{H}_r = \|\mathbf{Y}_r\| \setminus \{r\}$ donde $r \in P_R$.*

Una *BORPN* es una máquina de estado fuertemente conectada con recursos, por lo tanto todas sus transiciones tienen un único lugar de proceso entrada/salida y tendrían un único lugar de recurso entrada/salida. De esta manera, las transiciones podrían ser caracterizadas como $habilitadas$ o $deshabilitadas$, a través del marcado del lugar de recurso como se muestra en la figura 1 y es formalizado en las definiciones 3 and 4.

Definición 3. *Consideremos que $\mathcal{N}$ sea una* BORPN*, siendo P_R el conjunto de lugares de recursos y P_S el conjunto de lugares procesos. Una transición $t \in T$ está* habilitado en el marcado de proceso *o* (deshabilitado en el marcado de proceso) *resumido* $\mathbf{mpe}$ *o* ($\overline{\mathbf{mpe}}$) *sii $\forall p \in {}^{\bullet}t \cap P_S$ el marcado M de p como $M(p) \geq PRE(p,t)$ o $(M(p) < PRE(p,t))$.*

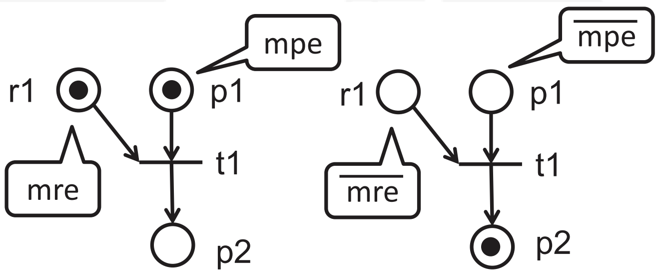

Figura 1. Marcado de recursos y procesos habilitado y deshabilitado.

Definición 4. *Consideremos que $\mathcal{N}$ sea una* BORPN*, siendo P_R el conjunto de lugares de recurso y P_S el conjunto de lugares de proceso. Una transición $t \in T$ está* habilitado en el marcado de recursos *o* (deshabilitado en el marcado de recursos) *resumido* $\mathbf{mre}$ *o* ($\overline{\mathbf{mre}}$) *sii $\forall p \in {}^{\bullet}t \cap P_R$ el marcado M de r como $M(r) \geq PRE(r,t)$ o $(M(r) < PRE(r,t))$.*

Para transiciones que liberan recursos T_r es suficiente el $\mathbf{mpe}$ marcado para que sean disparadas, sin embargo para el conjunto que adquieren recursos T_a deben estar $\mathbf{mre}$ y $\mathbf{mpe}$ para poder ser disparadas. La transición t_1 de la parte izquierda de la figura 1 está *habilitada en el marcado de proceso* y *habilitado en el marcado de recursos*, contrario a la transición de la parte derecha que está *deshabilitada en el marcado de proceso* y *deshabilitada en el marcado del recurso*. Un camino es un Semiflujo–T de $\mathcal{N}$ como $\mathbf{X}$, donde por cada $\|X\| = 2$ no satisface una de las cuatro condiciones necesarias y suficientes para la existencia de un bloqueo mutuo en [11]. Este tipo de ruta no tiene la *condición Retención y Espera* porque sólo solicita un recurso para finalizar el proceso completo. Por lo tanto, cada lugar p_i que pertenece a este tipo de Semiflujo–T es como sigue: $\forall p \in P_S \cap \mathcal{H}_r \mid {}^{\bullet} p \cap r^{\bullet} \neq \emptyset \wedge p^{\bullet} \cap {}^{\bullet} r \neq \emptyset$ donde $r \in P_R$. Debido a la estructura de la clase *BORPN*, algunos lugares nunca se incluirn en una situacin de bloqueo mutuo y se conocen como *lugares–sin–bloqueo–mutuo*.

Definición 5. *Consideremos que $\mathcal{N}$ sea una clase* BORPN*, siendo P_R el conjunto de lugares de recurso y P_S el conjunto de lugares de proceso. Un lugar $p_i \in P_S$ es llamado* lugares–sin–bloqueo–mutuo *sii $p_i^{\bullet} \cap {}^{\bullet} P_R \neq \emptyset$*

Los lugares que satisfacen la definición 5 serán disparados cuando tengan el marcado mpe, por lo que nunca pertenecen a un estado de bloqueo mutuo, sin embargo pueden formar parte estructural de un sifón.

B. *Clase BORPN*

La nueva clase es definida para enfrentar problemas de bloqueo mutuo en sistemas concurrentes siguiendo nuestro enfoque RAS de los procesos. La *BORPN* es una clase ordinaria de red de Petri donde el Semiflujo–P de un recurso es un vector binario, por lo que existe un camino dirigido entre las transiciones que toma el recurso y las transiciones que lo liberan.

Definición 6 (Un camino dirigido)**.** *Un camino dirigido es una secuencia de lugares y transiciones $p_1 t_1 p_2 t_2 \ldots p_k t_k$ tal que $\{t_1, t_2, \ldots, t_k\}$ desde p_1 hasta p_k donde $t_i \in p_i^{\bullet} \cap P_S$ y $t_i \in {}^{\bullet} P_{i+1} \cap P_S$, para $1 \leq i \leq k$ y $\{i,k\} \in \mathbb{N}^*$*

Cuando este camino dirigido es relacionado con una clase *BORPN* es conocido como la *zona de un recurso* como muestra la definicion 7. Esta característica es muy importante para evitar análisis estructural extensivo del modelo de red de Petri.

Definición 7 (Zona de un recurso)**.** *Consideremos que $\mathcal{N}_i = \langle P_i, T_i, \mathbf{C}_i \rangle$, $i \in \mathbb{N}^{*|\mathcal{N}|}$ sea una* BORPN *y P_R el conjunto de recursos. La* zona de un recurso *es el conjunto de lugares portadores de $r \in P_R$ que intercepta la red $\mathcal{N}_i$ como $\mathcal{Z}_{i,j}^r = \mathcal{H}_r \cap \mathcal{N}_i$, donde $i \in \mathbb{N}^{*|\mathcal{N}|}$ y $j \in \mathbb{N}^{*|P|}$.*

El subíndice i representa la clase *BORPN* y si existe más de una zona el subíndice j se incrementará. Cuando el índice j es omitido, asumimos solo una zona para este recurso. En procesos lineales existe solo un camino dirigido entre la captura y liberación del recurso, sin embargo para procesos no–lineales existiría más de una captura o liberación del recurso. El corolario 1 declara la estructura existente para una zona en procesos lineales.

Corolario 1 (Zona de recurso en procesos lineales)**.** *Consideremos que $\mathcal{N}$ sea una* BORPN *con solo procesos lineales, donde P_R es el conjunto de lugares de recurso. Consideremos que $\mathcal{Z}_{i,j}^r = \{p_1 \ldots p_k\}$, tal que $k \in \mathbb{N}^{*|P|}$ la zona de un recurso r en la red $\mathcal{N}_i$ para j=1. El lugar $p_x \in \|\mathbf{Y}_r\|$, $\forall x$=1....k,* *donde* $(p_x^{\bullet})^{\bullet} \cap \|\mathbf{Y}_r\| = P_{x+1}$*. Por lo que* $\nexists s$ *tal que* $p_1 \in \mathcal{Z}_{i,1}^s$ *y* $p_k \in \mathcal{Z}_{i,2}^s$*.*

En una máquina de estado fuertemente conectada podría existir procesos no–lineales, por lo que en esta red *la zona de un recurso* debe ser generalizada para considerar diferentes tomas y liberaciones de los recursos. Debido al enfoque RAS del proceso los lugares de la primera parte del proceso son del conjunto S_A donde A significa $adquiriendo$. Los lugares que se mantienen en la última parte del proceso pertenecen al conjunto S_R, en donde R significa $liberando$. El corolario 2 describe la estructura para una zona en procesos no–lineales.

Corolario 2 (Zona de recurso en procesos no lineales)**.** *Dejemos que* $\mathcal{N}$ *sea una* BORPN *con procesos no lineales, donde* P_R *es el conjunto de recursos y* $\{r, s\} \in P_R$*. Consideremos* $\mathcal{Z}_{i,j}^r$=$(S_A \cup S_R)$*, donde* ${}^{\bullet}S_A \subseteq r^{\bullet}$*,* $S_R^{\bullet} \subseteq{}^{\bullet} r$*. De esta manera,* $\forall p_i \in S_A, \exists p_j \in S_R$ *tal que* $(p_i^{\bullet})^{\bullet} \cap \|\mathbf{Y}_r\|$=$p_j, \forall i \neq j$*. Por lo que,* $\nexists s$ *tal que* $\exists p_x \in \mathcal{Z}_{i,1}^s \cap S_A$ *y* $\exists p_k \in \mathcal{Z}_{i,2}^s \cap S_R$*,* $\forall x \neq k$

La zonificación de los recursos produciría una superposición sobre las zonas. Cuando una superposición entre diferentes zonas de recursos es conocido como unos *equipos de recursos*. El concepto del equipo viene del punto de vista donde un proceso adquiere/libera diversos recursos en orden estricto. Todos ellos estan trabajando juntos durante el progreso del proceso como un equipo. Por otra parte, los equipos son una caracterización de este orden y serán usados para describir la nueva clase $BORPN$. La definición 8 resume este concepto de $equipo$ en una N_i

Definición 8. *Consideremos que* $\mathcal{N}$ *sea una* BORPN*, siendo* P_R *el conjunto de lugares de recurso. Un equipo es un conjunto de lugares donde* $\forall\{r_i, r_j\} \in P_R$*, satisfaciendo lo siguiente 1)* $\exists P_X \subseteq \|\mathbf{Y}_{ri}\| \cap \|\mathbf{Y}_{rj}\| \cap \mathcal{N}_i \neq \emptyset$ *y* ${}^{\bullet\bullet}P_X \cap P_R \neq P_X^{\bullet\bullet} \cap P_R$*. 2)* $\exists p_i \in \|\mathbf{Y}_{ri}\| \cap \mathcal{N}_i \setminus (P_X \cup \|\mathbf{Y}_{rj}\|) \neq \emptyset$*. 3)* $\exists p_j \in \|\mathbf{Y}_{rj}\| \cap \mathcal{N}_i \setminus (P_X \cup \|\mathbf{Y}_{ri}\|) \neq \emptyset$*.*

Este conjunto $P_X \subseteq P_S \cap \mathcal{N}_i$ estan en la intersección o superposición entre dos recursos en el modelo de red de Petri, no obstante debe ser un conjunto único. La segunda condición previene más de un conjunto P_X a traves de los recursos de entrada y salida. Finalmente, para prevenir subconjuntos entre recursos implicados, un conjunto de lugares particulares debe existir. Un lugar que no pertenece al Semiflujo–P del otro recurso implicado debe existir. Si las condiciones previas son cumplidas, una superposicionamiento existe entre todos los recursos implicados y es llamado un $equipo$ de recursos. Una red de Petri donde todos los recursos pertenecen a un $equipo$ es una clase $BORPN$ y adicionalmente es necesario que todos los lugares de proceso pertenezcan a cualquier recurso Semiflujo–P. Además, para cada transición donde el lugar de recurso r introduce *(el recurso es asignado)*, existe un único camino, en la máquina de estado fuertemente conectada, para alcanzar cada transición donde r produce *(el recurso es liberado)*.

Definición 9 (Las propiedades de recurso de la clase $BORPN$)**.** *Una red de Petri es una clase* $BORPN$ *si todo los recursos pertenecen a un Equipo y* $\nexists p_i \in P_S$ *tal que* $p_i \cap \|\mathbf{Y}_r\|$=$\emptyset$*,* $\forall r \in P_R$*.*

A continuación se muestran algunas características de una clase $BORPN$ y debe ser mencionadas como restricciones de la siguiente manera:

1) Los estados iniciales y finales están colapsados en un estado, llamado lugar $reposo$.
2) Las opciones entre el camino son permitidas, pero las iteraciones no.
3) Los recursos no pueden ser creados ni destruidos.
4) Los recursos son compartidos entre los caminos.
5) Los lugares de recursos tienen una marca indicando la disponibilidad.
6) Un estado puediese usar varios recursos simultaneamente.
7) La asignación de orden de recursos, debe ser el mismo para su liberación.
8) Transiciones adquirirían o liberarían recursos pero nunca ambos eventos.

El comportamiento de muchos sistemas pueden ser descritos en terminos de estados de sistemas y sus cambios, por lo que estos estados tiene un significado físico. Por lo tanto una *marcación inicial* representa ninguna actividad en el sistema y permite el comienzo de los procesos. La clase de red $BORPN$ es conservativa con los recursos debido al *Semiflujo–P*, todos las marcaciones alcanzables representarán estados posibles del sistema desde un *marcación inicial* aceptable. Las marcas en lugares P_{0i} representan la máxima cantidad de procesos esperando en la misma red de Petri o máquina de estados. Las marcas en lugares P_R modelan la disponibilidad de recursos, por consiguiente una marca es suficiente para representarlo. El lugar proceso P_S carece de marcas de *marcación inicial* porque la marcación inicial representa ninguna actividad del sistema.

Definición 10. *Consideremos que* $\mathcal{N} = \langle P_0 \cup P_S \cup P_R, T, \mathbf{C} \rangle$ *sea una red* $BORPN$*. Un marcado inicial* $\mathbf{m_0}$ *es aceptable para* $\mathcal{N}$ *si y solo si:*

1) $\forall i \in I_{\mathcal{N}}$, $\mathbf{m_0}[p_{0_i}] > 0$.
2) $\forall p \in P_S$, $\mathbf{m_0}[p] = 0$.
3) $\forall r \in P_R$, $\mathbf{m_0}[r] = 1$.

Para poder aplicar la polítca de control de prevención de bloqueo mutuo es necesario considerar la *marcación inicial* para el modelo de red de Petri modificado. A diferencia, nuestra polítca de control de evitación no modifica el modelo de red de Petri, por lo que la *marcación inicial* permanece sin cambios. Para aplicar nuestra polítca de control de prevención de bloqueo mutuo es necesario agregar diversos recursos virtuales para hacer un modelo de red de Petri libre-de-bloqueo-mutuo, sin embargo esos mantienen la misma *marcación inicial* que en recursos previos.

Al igual, si nuevos lugares de procesos deben ser adicionados, estos permanecen vacios en *marcación inicial*. Nuestra política de control de bloqueo mutuo no adiciona nuevos procesos al modelo de red de Petri, por lo que ningun lugar $reposo$ será agregado.

III. Análisis de vivacidad para la clase $BORPN$

En esta sección, la propiedad de vivacidad es caracterizada por los sifones. Un sifón es un conjunto de lugares que si se vuelven vacios, permanecán vacios para siempre. Por lo que, todas las transformaciones de salida de los lugares del sifón vacío estarán muertos para siempre porque por lo menos un lugar de entrada *(que pertenece al sifón)* está vacío para siempre. Sifones vacíos representan una geralización de las esperas circulares, porque en un sifón podemos encontrar una estructura intrincada de ciclos superpuestos de recursos vacíos. En [12] se rompe los sifones al añadir *recursos virtuales* hasta obtener un modelo de red de Petri libre–de–bloqueo–mutuo. En otra aproximación, se evita quelos sifones pierdan marcas por la vía de funciones lógicas que garantizan la propiedad de vivacidad hacia el modelo de red de Petri. La clase $BORPN$ tiene diversad propiedades relacionadas con la estructura de los sifones y sus recursos implicado, por lo que el concepto de *clase Red Estructuralmente Segura* será introducido debido a la marcación binaria de los lugares procesos y los lugares recursos. La estructura de la clase $BORPN$ garantiza que todos los estados alcanzables tienen estados booleanos.

Definición 11. *Un sistema de red de Petri $\mathcal{N}$ es llamado clase Red Estructuralmente Segura sii para cada lugar $p \in P_R \cup P_S$, existe un Semiflujo–P $\mathbf{y} \in \mathbb{N}^{*\|P_R \cup P_S\|}$ tal que $p \in \|\mathbf{y}\|$ y $\mathbf{y}.\mathbf{m_0} \leq 1$.*

Los siguientes resultados afirman que todos los vectores de marcado $\mathcal{R}(\mathcal{N}, \mathbf{m_0}) \setminus \{P_{0i}\} \mid i \in \mathbb{N}^{*|N|}$ excepto de los lugares $reposo$ pertenecen al conjunto $\{0, 1\}$. El lugar $reposo$ llena las condiciones necesarias para ser un *lugar implicito* porque todas sus transiciones de entrada tienen otro lugar de entrada. Resultando el marcado de lugares $reposo$ podría ser generado desde el marcado de otros lugares. Por lo tanto, reduciendo razonamiento acerca de redes de Petri a calculación booleana donde la manipulación de marcación podría ser realizada a travez de caracterización simbólica como los *Diagramas de Decisión Binaria Ordinaria* $(OBBDs)$. Una estrategia es reducir el número de elementos que tienen que ser tratados simultaneamente produce una red bien-definida. Esta fuerza para reducir la complejidad y manejar sistemas grandes, sin embargo esta discusión está más allá del alcanze de este artículo.

Lema 1. *Consideremos que $\langle \mathcal{N}, \mathbf{m_0} \rangle$, $\mathcal{N} = \langle P_0 \cup P_S \cup P_R, T, \mathbf{C} \rangle$, sea una red de Petri BORPN. Consideremos que m una marca muerta, tal que $m \in \mathcal{RS}(\mathcal{N}, \mathbf{m_0})$ y $\tau \subseteq T$ el conjunto de transiciones muertas que pertenecen a m. El conjunto τ llena que $\mid \tau \mid > 1$.*

Proof. Provamos este resultado por contradicción.
Supongamos que $|\tau| = 1$ y existe una transición $t \in \tau$ que está muerta en un marcado $m \in RS(\mathcal{N}, m_o)$. Como t es marcación muerta implica que $t \in^{\bullet} S_A|^{\bullet}S_A \in r^{\bullet}$ como establece el corolario 2, para esta t nosotros tenemos el estado $\overline{mre}$ y mpe. De mpe podemos disparar transiciones t mantenidas $\forall p \in S_P|m[p] \neq 0$ y m_o podría ser alcanzado. Pero como $|\tau| = 1$ y desde que el sistema es bien definido (por lo establecido en la definición 1() cualquier $Semiflujo_T$ mínimo conteniendo t podría ser disparable desde m_o que es una contradicción con t estando muerto en m. Esto contradice la hipótesis que $|\tau| = 1$ y podemos concluir que $|\tau| > 1$. □

A. Teorema de vivacidad

Una propiedad de vivacidad afirma que la ejecución del programa *(proceso)* eventualmente alcanza algún estado deseable. La propiedad de vivacidad y su caracterización estructural en la clase $BORPN$ es un caraterización muy importante que apoya los siguientes resultados teóricos. El bloqueo mutuo es un problema mayor para sistemas que asignan recursos en tiempo real. Cuando se hable de sistemas concurrentes esto es relacionado a la propiedad de libertad de bloqueo mutuo, caraterizada como propiedad de vivacidad en la clase $BORPN$. El teorema 1 resume este resultado.

Teorema 1. *La red $\mathcal{N}$ está viva sii no existe un sifón vacío $\mathcal{D}$, donde $\mid \mathcal{D} \cap P_R \mid \geq 2$ y existe mpe, $p \in \mathcal{D}$ y $\overline{mre}$, $r \in \mathcal{D}$*

Proof. Probaremos este resultado por contradicción.
$\Rightarrow$) Si $\mid \mathcal{D} \cap P_R \mid \geq 2$ entonces $\exists r_1, r_2 \in \mathcal{D}$ donde $r_1^{\bullet} = p$ y $r_2^{\bullet} = p'; p, p' \in \mathcal{N}_i$ como r pertence a la zona de un recurso $\mathcal{Z}_{i,j}^r = \mathcal{H}_r \cap \mathcal{N}_i, i \in \mathbb{N}^{*|\mathcal{N}|}$ por definición 7 y desde que existe mpe podemos verificar que $\exists p''|^{\bullet}p'' = r_1^{\bullet}$ y $\exists p'''|^{\bullet}p''' = r_2^{\bullet}$ donde $p'', p''' \in \mathcal{N}_j$ (existe tal p'' y p''' porque hay un arco desde r a t a p''; r_2 a t' y t' a p''' por contrucción) pero como $\mathbf{y}_r[r] = 1$ por definición 1, $\nexists mre, r \in \mathcal{D}$ por lo que $\mathcal{D}$ está vacío y la red $\mathcal{N}$ no está viva.
$\Leftarrow$) Si $\overline{mpe}$, $p \in \mathcal{D}$; mre, $r \in \mathcal{D}$ en $\mid \mathcal{D} \cap P_R \mid \geq 2$ entonces existe r, podemos disparar las transiciones $r^{\bullet}$ para todas los procesos activos que satisfacen la condicion $^{\bullet}p = r^{\bullet}$ pero como p pertenece a los portadores de r, por la definición 2 y hay más de un recurso en el sifón $\mathcal{D}$, esto declara que hay otro recurso r' que satisface $p \in \mathcal{H}_r'$ en la red $\mathcal{N}$. Como $\mathbf{y}_r[r] = 1$ entonces alcanzaremos un $\overline{mre}$, y mpe para $\mid \mathcal{D} \cap P_R \mid \geq 2$ que es un sifón vacón y podemos concluir □

B. Modelando un algoritmo básico de enrutamiento

En esta subsección se mostrará un ejemplo de un sistema de transporte modelado a travez de redes de Petri como una herramienta de síntesis y modelado. La figura 2.a muestra un sistema de transporte de objetos *(objetos físicos o virtuales)* compuestros de tres nodos o estaciones y dos canales duplex nomidados C_A y C_B. Se puede deducir que si los nodos or estaciones de los extremos *(1 y 3)* quieren mandar objetos cada uno simultaneamente, un bloqueo mutuo puede occurrir en el nodo del centro. Es preciso mencionar que nosotros asumimos que el nodo o estación 2 está deshabilitado para enviar o recibir mensajes, pero habilitado para reenviar los mensajes a los nodos/estaciones restantes.

La figura 2.b muestra una red de Petri con dos máquinas de estado, donde la máquina $SM1$ modela el flujo de objeto desde el nodo o estación 1 hacia el nodo o estación 3. La

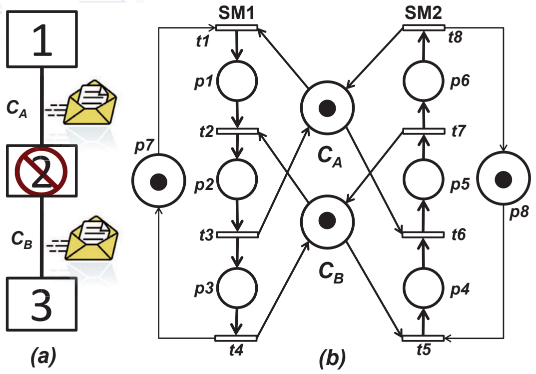

Figura 2. Modelado de un sistema de transporte a traves de una clase $BORPN$.

máquina $SM2$ modela el flujo en la dirección inversa, eso significa, los objetos desde el nodo o estación 3 al nodo o estación 1. Desde nuestra perspectiva RAS, los recursos son los canales del sistema y están representados por los lugares de recurso que denominamos C_A y C_B y tienen una marca que indica cuando ellos esten disponibles o no. Esta red de Petri pertenece a la clase $BORPN$ la cual es adecuada para el modelado de un amplio rango de Sistemas de Asignación de Recursos que adquieren y liberan recursos en el mismo orden. Como mencionamos en el teorema 1, la vivacidad de este tipo de redes está relacionada con la existencia de sifones que son insuficientemente marcadas en **m**. La red de la figura 2.b tiene un sifón D formado por los siguiente lugares $D = \{p_2, p_3, p_5, p_6, C_A, C_B\}$, donde no estan marcados con la marcación $m = p_1 + p_4$. Bajo esta marcación, las transiciones de salida de los lugares en el sifón t_2 y t_6 están muertos y los sifones D sin marcas. Evidentemente, hay un bloqueo mutuo y el sistema no garatiza la propiedad de vivacidad como la red de Petri muestra.

IV. Conclusiones

En este artículo hemos presentado una nueva clase de red de Petri orientada para tratar problemas de bloqueo mutuo en sistemas grandes que asignan recursos en forma unitaria y liberan estos en el mismo orden. La caracterización estructural para esta clase fue presentado a la vez que el teorema de vivacidad fue desmostrado. Aplicando análisis estructural sobre el modelo de red de Petri [9] somos capaces de caracterizar la propiedad de vivacidad a traves de una estructura llamada $sifón$. Diversas aproximaciones pudieron ser usadas para enfrentar problemas de bloqueo mutuo [1], sin embargo una política de prevención a traves de canales virtuales es la opción más adecuada para algoritmos de enrutamiento [12]. Por otra parte, una política de evitación que use funciones lógicas sobre las transiciones podría ser usada pero estas políticas están fuera del alcanze de este artículo.

Agradecimiento

Este trabajo a sido apoyado por la Universidad Tecnlógica de Panamá.

Referencias

[1] F. Tricas, "Analysis, prevention and avoidance of deadlocks in sequential resource allocation systems," Ph.D. dissertation, Zaragoza. España, Departamento de Ingeniería Eléctrica e Informática, Universidad de Zaragoza, May 2003.

[2] F. Tricas and J. Ezpeleta, "Computing minimal siphons in petri net models of resource allocation systems: a parallel solution," *Systems, Man and Cybernetics, Part A, IEEE Transactions on*, vol. 36, no. 3, pp. 532–539, May 2006.

[3] Y.-S. Huang, "Deadlock prevention for sequence resource allocation systems," *J. Inf. Sci. Eng.*, vol. 23, no. 1, pp. 215–231, 2007.

[4] E. Pastor, J. Cortadella, and O. Roig, "Symbolic analysis of bounded petri nets," *Computers, IEEE Transactions on*, vol. 50, no. 5, pp. 432–448, May 2001.

[5] K. Klai, S. Tata, and J. Desel, "Symbolic abstraction and deadlock-freeness verification of inter-enterprise processes," in *Proceedings of the 7th International Conference on Business Process Management*, ser. BPM '09. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2009, pp. 294–309.

[6] G. Ciardo, "Data representation and efficient solution: a decision diagram approach," in *Proceedings of the 7th international conference on Formal methods for performance evaluation*, ser. SFM'07. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2007, pp. 371–394. [Online]. Available: http://portal.acm.org/citation.cfm?id=1768017.1768026

[7] F. Vallés, F. Tricas, J. Ezpeleta, and J. Colom, "Structurally safe net systems," R. Boel and G. Stremersch, Eds., Kluwer Academic Press. Kluwer Academic Press, 8 2000, pp. 441–448.

[8] E. Cano, A. Rovetto, and J. Colom, "On the computation of the minimal siphons of S^4PR nets from a generating family of siphons," *15th. IEEE Int. Conf. on Emerging Technologies and Factory Automation*, September 2010.

[9] E. E. Cano, C. A. Rovetto, and J. M. Colom, "An algorithm to compute the minimal siphons in s 4 pr nets," *Discrete Event Dynamic Systems*, vol. 22, no. 4, pp. 403–428, 2012.

[10] T. Murata, "Petri nets: Properties, analysis and applications," *Proceedings of the IEEE*, vol. 77, no. 4, pp. 541–580, April 1989.

[11] E. G. Coffman, M. Elphick, and A. Shoshani, "System deadlocks," *ACM Comput. Surv.*, vol. 3, pp. 67–78, June 1971. [Online]. Available: http://doi.acm.org/10.1145/356586.356588

[12] C. A. Rovetto, E. E. Cano, and J. Colom, "Deadlock analysis in minimal adaptive routing algorithms using petri nets," *Systems, Man, and Cybernetics, 2010 IEEE International Conference on*, 10 2010.

Apéndice

Una *red lugar/transición* (red L/T), es una tupleta triple $\mathcal{N} = \langle P, T, W \rangle$, donde W es una función total $W : (P \times T) \cup (T \times P) \rightarrow \mathbb{N}^*$, siendo P, T conjuntos no vacios, finitos y disjuntos. Elementos pertenecientes a los conjuntos P y T son llamados respectivamente *lugares* y *transiciones*, o generalmente nodos. Las redes L/T pueden ser representados como un grafo biparito directo, donde los lugares (transiciones) son graficamente denotados por circulos (rectangulos): dejemos que $p \in P$, $t \in T$, $u = W(p,t)$, $v = W(t,p)$, hay un arco directo, etiquetado u (v), comenzando en p (t) y terminando en t (p) sii $u \neq 0$ $(v \neq 0)$.

El *preset* (*postset*) o conjunto de nodos de entradas (salidas) $x \in P \cup T$ es denotado por ${}^\bullet x$ $(x^\bullet)$, donde ${}^\bullet x = \{y \in P \cup T \mid W(y,x) \neq 0\}$ $(x^\bullet = \{y \in P \cup T \mid W(x,y) \neq 0\})$. El preset (postset) es un conjunto de nodos $X \in bag(P) \cup bag(T)$ es denotado por ${}^\bullet X$ $(X^\bullet)$, donde ${}^\bullet X = \{y \mid y \in {}^\bullet x, x \in X\}$ $(X^\bullet = \{y \mid y \in x^\bullet, x \in X\}$

Una *red L/T generalizada* es una red con pesos de arcos positivos. Si los pesos del arco son unitarios (i.e., W puede ser definido como una funcíon total $(P \times T) \cup (T \times P) \rightarrow \{0, 1\}$) la red es llamada *ordinaria*. Una *máquina de estado* es una red ordinaria tal que para cada transición $t \in T$,$|{}^\bullet t| = |t^\bullet| = 1$.

Dejemos que $\mathcal{N} = \langle P, T, W \rangle$ sea una red L/T. Su (red inversa) $\mathcal{N}^r = \langle P, T, W^r \rangle$ es la misma red con sus arco invertidos, i.e. $W^r(p,t) = W(t,p)$ y $W^r(t,p) = W(p,t)$.

Un lugar con ciclo propio $p \in P$ es un lugar tal que $p \in p^{\bullet\bullet}$. Una *red L/T pura* (tambien una red L/T libre de ciclos propios) es una red sin lugares con ciclos propios. En redes L/T puras, la red puede ser tambien definida por la tupleta triple $\mathcal{N} = \langle P, T, C \rangle$, donde C es llamada la *matriz de incidencia*, $C[p,t] = W(p,t) - W(t,p)$.

Una *marca* m de una red L/T $\mathcal{N}$ es un vector $\mathbb{N}^{*|P|}$, asignando un numero finito de marcas $m[p]$ (llamadas *marcas*) a cada lugar $p \in P$. Las marcas son representadas por puntos negros dentro de los lugares. El *soporte* de una marca, $\|m\|$, es un conjunto de lugares que son marcados en m, i.e. $\|m\| = \{p \in P \mid m[p] \neq 0\}$.

Definimos una *red L/T marcada* (incluso un sistema de red L/T) como una dupleta $\langle \mathcal{N}, m_0 \rangle$, donde $\mathcal{N}$ es una red L/T, y m_0 es una marca para $\mathcal{N}$, tambien llamda *marca inicial*. $\mathcal{N}$ se dice que es la esctuctura del sistema donde m_0 representa el estado del sistema.

Dejemos que $\langle \mathcal{N}, m_0 \rangle$ sea una red L/T marcada. Una transición $t \in T$ esa *habilitada* (incluso *disparable*) sii $\forall p \in {}^{\bullet}t \;.\; m_0[p] \geq W(p,t)$, que es denotada por $m_0[t\rangle$. El *disparador* de una transción habilitada $t \in T$ cambia el estado del sistema a $\langle \mathcal{N}, m_1 \rangle$, donde $\forall p \in P \;.\; m_1[p] = m_0[p] + C[p,t]$, y es denotado por $m_0[t\rangle m_1$. Una *secuencia de disparo* σ desde $\langle \mathcal{N}, m_0 \rangle$ es una secuencia de transiciones no vacía $\sigma = t_1\, t_2 \ldots t_k$ tal que $m_0[t_1\rangle m_1[t_2\rangle \ldots m_{k-1}[t_k\rangle$. El disparado de σ es denotado por $m_0[\sigma\rangle t_k$. Nosotros llamamos al vector de *conteo de disparado* $\boldsymbol{\sigma}$ de σ al mapeo de Parikh $\sigma \rightarrow \mathbb{N}^{*|T|}$ (i.e. $\boldsymbol{\sigma}[t]$ es igual al numero de veces que t aparece en σ). El soporte de $\boldsymbol{\sigma}$ es denotado por $\|\boldsymbol{\sigma}\|$.

Una marca m es *alcanzable* desde $\langle \mathcal{N}, m_0 \rangle$ sii existe una *secuencia de disparo* σ tal que $m_0[\sigma\rangle m$. El *conjunto de alcanzabilidad* $RS(\mathcal{N}, m_0)$ es un conjunto de marcas alcanzables, i.e. $RS(\mathcal{N}, m_0) = \{m \mid \exists\, \sigma \;.\; m_0[\sigma\rangle m\}$.

La *ecuación de estado de red* de una red L/T marcada $\langle \mathcal{N}, m_0 \rangle$ es una ecuación definida como $m = m_0 + C \cdot \boldsymbol{\sigma}$, donde $\boldsymbol{\sigma} \gneqq \mathbf{0}$. Cada marca alcanzable guarda la ecuación de estado de la red, pero puede que exista soluciones para la ecuación las cuales no son marcas alcanzables. Por lo que nosotros llamaremos m una *marca potencialmente alcanzable*. El *conjunto de alcanzabilidad potencial* $PRS(\mathcal{N}, m_0)$ es definido como $PRS(\mathcal{N}, m_0) = \{m \mid \exists\, \boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{N}^{*|T|} \;.\; m = m_0 + C \cdot \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma} \gneqq \mathbf{0}\}$.

Una transción $t \in T$ está *viva* sii para cada marca alcanzable $m \in RS(\mathcal{N}, m_0)$, $\exists m' \in RS(\mathcal{N}, m)$ tal que $m'[t\rangle$. El sistema $\langle \mathcal{N}, m_0 \rangle$ está *vivo* sii cada transción está viva. De otro modo, $\langle \mathcal{N}, m_0 \rangle$ está *muerto*. Una transición $t \in T$ está *muerta* sii no hay marcas alcanzables $m \in RS(\mathcal{N}, m_0)$ tal que $m[t\rangle$. El sistema $\langle \mathcal{N}, m_0 \rangle$ está en un *bloqueo mutuo total* sii cada transición está muerta, i.e. ninguna transición es disparable. Un *estado hogar* m_k es una marca tal que es alcanzable desde cada marca alcanzable, i.e. $\forall m \in RS(\mathcal{N}, m_0) \;.\; m_k \in RS(\mathcal{N}, m)$. El sistema de red $\langle \mathcal{N}, m_0 \rangle$ es *reversible* sii m_0 es un estado hogar.

Un *semiflujo-p* (*semiflujo-t*) es un vector $Y \in \mathbb{N}^{*|P|}$, $Y \neq \mathbf{0}$ ($X \in \mathbb{N}^{*|T|}$, $X \neq \mathbf{0}$), que es un anulador izquierdo (derecho) de la matriz de incidencia, $Y \cdot C = \mathbf{0}$ ($C \cdot X = \mathbf{0}$). El soporte de un semiflujo-p (semiflujo-t) es denotado $\|Y\|$ ($\|X\|$), y sus lugares (transciones) se dicen que son cubiertos por Y (X). La red L/T $\mathcal{N}$ es *conservativa* (*consistente*) sii cada lugar (transción) es cubierto por un semiflujo-p (semiflujo-t). Un *semiflujo-p mínimo* (*semiflujo-t mínimo*) es un semiflujo-p (semiflujo-t) tal que el m.c.d. de sus componentes no nulos es uno y su soporte $\|Y\|$ ($\|X\|$) no es un super conjunto estricto del soporte de otro semiflujo-p (semiflujo-t).

Un *camino* π de una red L/T $\mathcal{N}$ es una secuencia de nodos $\pi = x_1\; x_2\; \ldots\; x_n$ tal que los componentes impares son lugares y los componentes pares transiciones, o viceversa, y para cada par (x_i, x_{i+1}), $W(x_i, x_{i+1}) \neq 0$. Un *camino elemental* es un camino tal que $\forall i,j \in [1,n] \;.\; x_i \neq x_j$, excepto para $x_1 = x_n$ (lo cual es permitido). Un *circuito general* es un camino tal que $x_1 = x_n$. Un *circuito elemetal* (o simplemente *circuito*) es a la vez un camino elemental y un circuito general.