

# Modelación matemática en un curso de pregrado de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

## Enseñando matemáticas en contexto

Norma Miller 

Universidad Tecnológica de Panamá

norma.miller@utp.ac.pa

DOI: 10.33412/pri.v12.1.2875



### Resumen

Las ecuaciones diferenciales ordinarias constituyen una parte significativa de cualquier currículo de ingeniería. No obstante, los estudiantes a menudo cuestionan la relevancia para su vida profesional de las matemáticas que aprenden en los cursos de ecuaciones diferenciales ordinarias. En buena medida esto se debe a que en las aulas de matemáticas pocas veces se establecen nexos reales y creíbles entre los conceptos estudiados y los fenómenos y situaciones de la vida real.

Por otra parte, diversas organizaciones vinculadas a la formación de profesionales de la ingeniería por décadas han destacado la capacidad de modelación como una competencia esencial a desarrollar en los estudiantes de ingeniería y carreras afines, y han hecho un llamado para incluir la modelación en los cursos básicos de matemáticas a nivel de pregrado.

En el 2013 el Dr. Brian Winkel, profesor emérito de matemáticas del United States Military Academy, West Point puso en marcha una comunidad abierta de enseñantes y aprendientes para enseñar y aprender sobre ecuaciones diferenciales a nivel de pregrado. La propuesta pedagógica de esta comunidad, denominada modelado primero, ya empieza a conocerse y ponerse práctica en algunas universidades latinoamericanas, aunque todavía no en Panamá.

Este artículo da cuenta de un taller de modelación matemática realizado por el Dr. Winkel en la Universidad Tecnológica de Panamá en febrero de 2020. El taller estaba dirigido a docentes de la propia institución que regularmente imparten el curso de ecuaciones diferenciales ordinarias, con el objetivo de motivarlos a incorporar la modelación matemática en su quehacer docente. Profesores de matemáticas de otras instituciones de educación superior de Panamá, docentes de secundaria, así como estudiantes de posgrado que requerían afinar sus habilidades de modelación matemática para sus trabajos de investigación también participaron.

Posteriormente, algunos de los docentes participantes implementaron escenarios de modelación con sus estudiantes durante el primer semestre del año académico 2020-2021. En este artículo se describe brevemente la respuesta de los estudiantes a esta innovación pedagógica.

**Palabras clave:** modelación matemática, ecuaciones diferenciales ordinarias, pedagogía activa, enseñanza contextualizada, aprendizaje significativo, innovación pedagógica.

**Title:** Mathematical Modeling in an undergraduate ODE course. Teaching mathematics in context

### Abstract

Ordinary differential equations constitute a significant portion of any engineering curriculum. However, students often question the relevance to their professional lives of the mathematics they learn in ordinary differential equations courses. This is largely due to the fact that they rarely see real and credible connections to real world phenomena and situations in their mathematics classroom.

On the other hand, numerous organizations linked to the education of engineering professionals, have for decades regarded modeling as an essential skill to foster in students of engineering and related professions, and have called for including modeling in university mathematics courses.

Since 2013 Dr. Brian Winkel, Emeritus Professor of Mathematics at the United States Military Academy - West Point, runs an open community of teachers and learners committed to a *modeling first* approach to teaching differential equations. This pedagogical innovation is starting to be known and used in several Latin-American universities, though not yet in Panama.

This article informs of a mathematical modeling workshop conducted by Dr. Winkel at the Technological University of Panama in February 2020. The workshop was directed to university's math professors who regularly teach the ordinary differential equations course, in the hopes of motivating them to incorporate mathematical modeling into their teaching. Mathematics professors from other higher education institutions of Panama, high school teachers, as well as graduate students who needed to hone their mathematical modeling skills to carry out their research, also participated.

Subsequently, several teachers implemented modeling scenarios with their students during the fall semester of the 2020-2021 school year. Student response to this pedagogical innovation is briefly described.

**Keywords:** mathematical modeling, ordinary differential equations, active teaching, contextualized teaching, meaningful learning, pedagogical innovation.

Tipo de artículo: Ensayo.

Fecha de recepción: 8 de octubre de 2020.

Fecha de aceptación: 5 de enero 2021.

### 1. Introducción

Las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) constituyen una parte significativa de cualquier currículo de ingeniería y del currículo ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas (CTIM).

No obstante, en los ámbitos de formación en ingeniería en Panamá, al igual que en otros países, los estudiantes a menudo cuestionan la relevancia que tendrá para el ejercicio de su

profesión la matemática que aprenden en las aulas universitarias [1]. Este cuestionamiento se debe en buena medida a que en el aula matemática pocas veces los docentes establecen nexos reales y creíbles a fenómenos y situaciones de la vida real.

Por otra parte, durante varias décadas se ha debatido el rol que deberían jugar las matemáticas en la formación de ingenieros y profesionales de otras ramas con un fuerte componente de matemática aplicada. Importantes organizaciones vinculadas a la formación de estos profesionales, como la Sociedad Europea de Formación de Ingenieros (SEFI), la Asociación Matemática de América (MAA), la Sociedad Matemática Americana (AMS), y la Sociedad para Matemática Aplicada e Industrial (SIAM) destacan la capacidad de la modelación matemática como una competencia esencial a desarrollar en los estudiantes de ingeniería y carreras afines, y han hecho un llamado para dar mayor énfasis a la modelación en los cursos de matemáticas [2].

Los espacios naturales para empezar a desarrollar destrezas de modelación matemática son sin duda los cursos de matemáticas, pero eso pocas veces sucede. La enseñanza de las matemáticas en Panamá, a cualquier nivel, suele ser abstracta y descontextualizada. El conocimiento matemático se aplica, a lo sumo, en los problemas de aplicación de los libros de texto, los cuales los estudiantes no suelen relacionar con el mundo real. Esto dificulta que el estudiante logre establecer las conexiones que le permitirán hacer uso de las herramientas matemáticas que está adquiriendo para pensar acerca de, y proponer soluciones a, problemas reales.

En los Estados Unidos, Brian Winkel ha liderado desde el 2013 una iniciativa para promover la modelación matemática en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales desde los primeros años de pregrado universitario e incluso desde la secundaria. Como fundador de la comunidad *Systemic Initiative for Modeling Investigations & Opportunities with Differential Equations*, (SIMIODE), Brian Winkel ha creado y consolidado una comunidad abierta de enseñantes y aprendientes que implementan el esquema de “modelado primero” (*modeling first*) para enseñar y aprender sobre ecuaciones diferenciales [3]. Esta innovación educativa empieza a conocerse y ponerse práctica en algunas universidades latinoamericanas (Ej., Universidad Estatal de Feira de Santana, Brazil; Instituto Politécnico Nacional México, México; Universidad Central del Valle del Cauca, Colombia). Sin embargo, en Panamá, hasta donde tenemos conocimiento, aun es poco conocida.

## 2. Modelación matemática en el aula

Llevada al aula de clases, la modelación matemática se perfila como una estrategia pedagógica para tender puentes entre la teoría matemática y diferentes preguntas acerca del mundo sobre las cuales ésta puede iluminar nuestro entendimiento y proveer respuestas. A la vez, la modelación matemática “es un entorno de aprendizaje donde se invita a los estudiantes a tomar un problema e investigarlo en referencia a la realidad haciendo uso de las matemáticas” [4]. La literatura sobre el tema apunta a que la modelación matemática, como estrategia de enseñanza, contribuye a que los estudiantes se sientan más motivados a aprender y tengan un aprendizaje más significativo. Si bien las

experiencias han sido principalmente a nivel secundario, se presume que los mismos principios aplican para estudiantes universitarios [5].

Experiencias personales apuntarían a que dicha presunción es correcta. Desde hace varios años venimos asignando proyectos de modelación matemática a estudiantes de Cálculo y de EDO en la Universidad Tecnológica de Panamá (UTP) con la finalidad de establecer firmemente en sus mentes un vínculo entre el contenido matemático del curso y el entendimiento de diversos fenómenos de la vida real. Para hacerlo hemos partido de proyectos de modelación compartidos en Internet. Si bien estos proyectos de clase han resultado experiencias positivas y motivadoras para los alumnos, presentan limitaciones tanto en la temática abordada, como en los aspectos teóricos y prácticos de las actividades propuestas.

El auge que en los últimos años ha cobrado la investigación a nivel de pregrado en la UTP, gracias a la celebración de la Jornada de Iniciación Científica (JIC), seguramente ha contribuido a que algunos estudiantes incursionen en la modelación matemática, ya sea por cuenta propia o guiados por sus asesores de proyecto. Sin embargo, la inmensa mayoría de estos proyectos no surgen dentro de cursos de matemáticas ni son asesorados por docentes de esta disciplina. Fuera del contexto de la JIC, no tenemos conocimiento de actividades de modelación matemática vinculados a la enseñanza formal de las matemáticas de pregrado en la UTP. Colegas docentes que desarrollan o supervisan proyectos de modelación matemática con estudiantes de *posgrado*, generalmente no utilizan esta metodología con estudiantes de *pregrado*.

De lo anterior surgió y se concretó, con el apoyo de Secretaría Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación (SENACYT), una propuesta para realizar en Panamá un taller de modelación matemática, con el objetivo de generar conciencia sobre los beneficios de esta estrategia pedagógica para el aprendizaje significativo de las matemáticas, y de fortalecer la docencia de aquellos profesores que regularmente imparten la asignatura de ecuaciones diferenciales. La capacitación, a cargo del propio Dr. Winkel, dotó a los participantes no solamente de los conocimientos y herramientas para implementar exitosamente la modelación matemática en sus aulas, sino que constituyó un espacio de reflexión sobre su práctica docente, de valoración de la modelación matemática como estrategia pedagógica, y de debate acerca de posibles dificultades para su implementación en la UTP.

## 3. Taller de modelación matemática

El taller “Modelación matemática en el aula: Enseñando matemáticas en contexto” se realizó del 3 al 7 de febrero del 2020 en el Campus Central de la UTP. En un principio el taller estaba dirigido a docentes de matemáticas de la propia institución. Sin embargo, ante la incertidumbre de llenar los 20-25 cupos disponibles, el compás del evento se amplió y el mismo se divulgó por redes sociales. Finalmente hubo 20 participantes, desglosados como sigue: 9 docentes de matemáticas de la UTP, 1 docente de la UP (tiempo parcial en la UTP), 1 docente de la UDI, 2 docentes de secundaria y 1 docente visitante de una

universidad de los EU, 3 estudiantes de la Maestría en Ciencias de la Ing. Mecánica de la UTP y 3 estudiantes de pregrado también de la UTP. La participación de los estudiantes de maestría se debió a una necesidad de fortalecer su base en modelación matemática para sus trabajos de tesis. Todos los escenarios de modelación tratados en el taller fueron traducidos a español y están disponibles para todo el público interesado en la página Web de SIMIODE (<http://www.simiode.org>)

Durante el taller los participantes tuvimos la oportunidad de explorar la modelación matemática de la mano de un docente de la más alta calidad académica y humana, y con más de 40 años de experiencia utilizando esta estrategia pedagógica con estudiantes de pregrado. La gama de fenómenos o situaciones modeladas asombró a los participantes: se modeló desde *Muerte e inmigración de m&m's* y *Construcción de un túnel por una hormiga*, hasta *Expansión de una mancha de petróleo en el mar* y *Disipación de una burbuja de gas intraocular*.

Si algo quedó clarísimo de este taller es que toda situación cambiante puede modelarse mediante ecuaciones que involucran derivadas, es decir, ecuaciones diferenciales.

Otro aprendizaje que nos llevamos del taller fue la diferencia entre modelos basados en data (experimental o de otro tipo) y modelos derivados “de primeros principios”, como por ejemplo, la modelación de una columna de agua cayendo (vacío de un tanque) a partir del Principio de Conservación de Energía y la Ley de Torricelli. Finalmente, el uso del Solver de Excel facilitó la obtención del valor óptimo de los parámetros de cada modelo y permitió enfocar la atención en la interpretación y validación de los modelos.

En un ambiente cálido y ameno, donde las anécdotas estuvieron a la orden del día, Brian Winkel, profesor emérito de la Academia Militar de Estados Unidos, West Point, maravilló a los participantes por la sencillez y claridad de sus exposiciones, la sensibilidad y consideración hacia los estudiantes, su genialidad pedagógica, y su entrega y dedicación a la tarea docente.



Figura 1. Participantes del Taller de Modelación Matemática.

La evaluación del taller por parte de los participantes fue excelente. Sin embargo, la verdadera “prueba de excelencia” fueron los resultados obtenidos por los tres docentes de ecuaciones diferenciales cuyas circunstancias les permitieron, a

pesar del Covid-19, implementar la metodología durante el primer semestre del año académico 2020-2021. Estos docentes realizaron actividades de modelación utilizando 3 escenarios de modelación diferentes: *Muerte e Inmigración de m&m's*, *Túnel de Hormigas*, y *Ley de Torricelli*. En total, entre los tres grupos más de 100 estudiantes tuvieron al menos una experiencia de modelación matemática en el aula. Esto pudo darse, a pesar de la pandemia.

Es menester señalar que gracias al generoso ofrecimiento del Dr. Winkel los estudiantes de la UTP tuvieron la oportunidad de aprender sobre modelación matemática directamente de este experto de talla mundial, en dos escenarios de modelación realizadas vía TEAMS, en inglés, y con la traducción consecutiva de la Prof. Norma Miller. Estas sesiones fueron grabadas y compartidas a través de la plataforma Microsoft institucional, para beneficio de todos los docentes que quieran implementar la modelación en sus cursos de matemáticas, al igual que de todos los estudiantes que deseen aprender sobre modelación.

En la última semana del semestre a los estudiantes que realizaron las actividades de modelación se les pidió llenar una encuesta anónima a través de la aplicación Google Forms. Más del 90% de los 44 estudiantes que respondieron consideraron que la modelación matemática es beneficiosa para el estudiante, ya que “contribuye a ver la aplicabilidad de las ecuaciones diferenciales a la vida real” y a “apreciar mejor cómo se estudia un problema desde una perspectiva científica”. Resulta significativo que indicaran que la actividad de modelación matemática aumentó su interés por la asignatura de EDO y por la modelación misma, y que recomendaran al docente seguir realizando este tipo de actividades.

Evidencia adicional del impacto del taller en la comunidad UTP fue el hecho de que dos de los *estudiantes participantes* en el taller (uno de ellos recién graduado y otro en el último año de carrera) prepararon y enviaron una intención de propuesta a la Convocatoria Pública de Investigación + Desarrollo + Innovación de Respuesta Rápida al Covid-19 titulada “*Modelación Epidemiológica de la propagación del Covid-19 en Panamá*”, para cuya preparación contaron con el apoyo del Dr. Winkel.

#### 4. Conclusión

A todas luces, la realización del taller fue un éxito. Los participantes vivenciaron la modelación matemática como si hubiesen sido estudiantes de un curso de ecuaciones diferenciales ordinarias. Los participantes docentes pudieron percatarse del potencial de esta estrategia pedagógica para despertar la curiosidad natural y el interés del estudiante en una asignatura que tradicionalmente es percibida como una mera colección de fórmulas y técnicas de resolución analíticas, desprovistas de significado “real”. Más aun, la disponibilidad de actividades o escenarios de modelación en español prácticamente listas para implementarse facilita enormemente la tarea del docente para ponerlas en práctica en su propia aula.

Por su parte, los estudiantes de posgrado y pregrado avanzados que participaron del taller manifestaron su satisfacción con la metodología y desearon haber recibido este tipo de instrucción mucho antes en su formación académica.

Es nuestra esperanza que, a raíz de este taller, empecemos a ver más docentes de la asignatura de ecuaciones diferenciales ordinarias de la UTP poniendo en práctica la modelación matemática, como una manera de motivar y retar a sus estudiantes, fomentando curiosidad e intuición, desarrollando capacidad de razonamiento lógico y crítico, y estimulando pensamiento divergente y creativo en la aplicación de las matemáticas al entendimiento y resolución de situaciones de la vida real.

Este taller tuvo el valor agregado de darle continuidad al Proyecto Piloto de *Metodologías de Enseñanza Activa* que la UTP implementó en el 2014, a través de la Vicerrectoría Académica y con el apoyo de la Iniciativa para el Desarrollo de la Innovación Académica (IDIA) de LASPAU, con la finalidad de elevar la calidad de la docencia en nuestra institución.

### Agradecimiento

La autora agradece a la Secretaría Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación (SENACYT) por el financiamiento

brindado a través de la Convocatoria Pública Continua para Apoyo a Congresos, Jornadas, Seminarios y/o Talleres en Panamá, 2019, contrato No. 179-2019.

### Referencias

- [1] L. M. Peña-Páez y J. F. Morales-García, "La modelación matemática como estrategia de enseñanza-aprendizaje: El caso del área bajo la curva". *Revista Educación en Ingeniería*, 11 (21), pp. 64-71, 2016. Disponible en: <https://educacioneningenieria.org/index.php/edi/article/view/637>
- [2] (2019) The SIMIODE website. [Online]. Disponible en: <http://www.simiode.org>
- [3] B. Winkel, "Browsing Your Way to Better Teaching", *PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*. 23(3): 274-290, 2013. <https://www.simiode.org/resources/235/download/2013Browsing-PRIMUS-Vol23No3PP274-290.pdf>
- [4] J.C. Barbosa, *Mathematical modelling in classroom: a sociocritical and discursive perspective*. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38 (3), pp. 293-301, 2006. <https://core.ac.uk/download/pdf/12518237.pdf>
- [5] M. Trigueros Gaisman, "Uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas"- *Educación Innovativa*, vol. 9, núm. 46. Instituto Politécnico Nacional México, 2009. <https://www.redalyc.org/pdf/1794/179414894008.pdf>