

4. EL 14 % de los vehículos diesel (usados) probados presentaron niveles de opacidad mayor de 50 UH. Este grupo de vehículos se puede considerar con alto riesgo de sobrepasar los niveles de opacidad permitidos en Panamá, en un período corto de tiempo.
5. El 13 % de los buses, el 12 % de los camiones y el 18 % de los camiones articulados (mulas) probados, presentaron niveles de opacidad superiores a 50 UH, por lo cual, se encuentran en el grupo de riesgo de superar los niveles de emisión permitidos en un corto tiempo.
6. 42 vehículos no pasaron la prueba de opacidad; esto corresponde al 5 % de los vehículos usados sometidos a la prueba.
7. El total de vehículos diesel rechazados estuvo compuesto de la siguiente forma: 38 % buses, 41 % camiones, 14 % camiones articulados y 7 % otros.

BREVE EXPOSICIÓN DEL MÉTODO DE ELEMENTOS DE FRONTERA

Por: Ing. María Him de Chang

Extracto General

Pretendemos presentar una breve exposición de las bases matemáticas del método de Elementos de Frontera, así como también algunos teoremas que fundamentan el mismo.

Introducción

La inconveniencia del manejo de matrices gigantescas, la redefinición de los elementos en piezas modeladas y la necesidad de más precisión en la solución de ciertos problemas modelados con el Método de Elementos Finitos (FEM), son algunas de las razones por la cual se consideró el Método de Elementos en la Frontera (BEM) como un método alternativo a ciertas aplicaciones en ingeniería.

Cuando encontramos casos tales como piezas que necesiten modificar su diseño constantemente, el FEM se torna sumamente tedioso, mientras que en el BEM no hay la necesidad de redefinir todo el reticulado del modelo, sino sólo su redistribución superficial. Muchos autores ([1], [3]) debaten acerca de la ventaja y versatilidad del método frente al FEM. Sin embargo, la complejidad matemática del BEM le hace inatractivo al usuario, pero una vez comprendida la estructura analítica se torna una herramienta de mucha utilidad.

Fundamento Matemático del Método de Elemento de Frontera

Considerando la ecuación de Laplace en dos dimensiones:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

Donde u es la función que gobierna la ecuación ya sea en aplicaciones de conducción de calor, torsión, flujo potencial, concentración de esfuerzo, etc.

Considerando el método de los pesos residuales y estableciendo la función fundamental de peso residual como u^* , se obtiene la solución de la ecuación diferencial como:

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right)$$

Donde r es la distancia entre un punto P en el interior y un punto Q en la superficie del modelo en consideración.

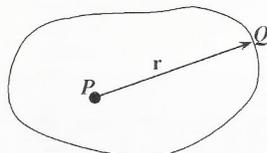


Fig. 1

Existen varias maneras de deducir la ecuación inicial de frontera tales como pesos residuales, teorema Recíproco de Betti, la tercera identidad de Green o los principios fundamentales de trabajo virtual. Una de las ventajas en utilizar los pesos residuales consiste en su generalidad porque permite la extensión del método a aplicaciones con ecuaciones diferenciales parciales más complejas.

Considerando el método de pesos residuales, tenemos que introducir una solución aproximada reemplazando los valores de u y q , donde q es la derivada de u con respecto a la normal. El error de la ecuación donde se ha sustituido u y q por esta solución se minimiza ortogonalizando la ecuación con respecto a la función de peso u^* , cuyas derivadas están dadas como:

$$q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n}$$

siendo n la normal a la superficie como se muestra en la figura 2. Aplicando la función peso se obtiene entonces [2]:

$$\int_{\Omega} R u^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} R_2 u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} R_1 u^* d\Gamma$$

donde Ω representa el dominio en el cual la ecuación se aplica y está delimitado por Γ . Γ a su vez, está dividida en dos partes, tal que $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ y que además:

$$u = \bar{u} \quad \text{en } \Gamma_1$$

$$q = \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q} \quad \text{en } \Gamma_2$$

Siendo \bar{u} y \bar{q} valores conocidos. Integrando esta ecuación obtenemos [2]:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u^*) u d\Omega = \int_{\Gamma_2} \bar{q} u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} q u^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u q^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u} q^* d\Gamma$$

Y luego de cierta manipulación matemática obtenemos la Ecuación Integral de Frontera (BIE):

$$\frac{1}{2} u^i + \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma = \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma$$

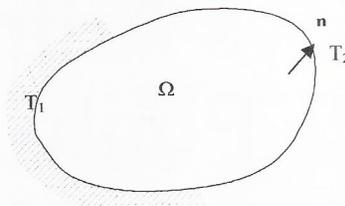


Fig. 2

Expresando la BIE en términos de sumatorias para un cuerpo en dos dimensiones, dividido en N elementos y siendo i el "i-avo" nudo en la frontera, obtenemos:

(3)

$$\frac{1}{2} u^i + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} u q^* d\Gamma = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} q u^* d\Gamma$$

Se prosigue entonces a discretizar la frontera utilizando elementos ya sean constantes, cuadráticos, cúbicos o de más alto orden. Aumentando el grado del polinomio de discretización obtendremos soluciones más precisas. Una vez culminada la etapa de discretización, tomando todas las consideraciones del problema, se aplican las condiciones de frontera y se arman las matrices que

gobiernan el modelo. Utilizando técnicas estándares de resolución de ecuaciones, tales como eliminación de Gauss, podemos encontrar las soluciones de problemas en dos y tres dimensiones.

Conclusiones

Considerando lo expuesto, concluimos que el método BEM es más laborioso que el FEM, matemáticamente hablando. Las bases matemáticas son sumamente complejas, pero su amplia aplicación, su versatilidad y sus soluciones precisas hacen valioso el esfuerzo. Otra manera interesante de enfocar la derivación de la BIE sería utilizando la segunda identidad de Green como lo han hecho [1] y [3]. Pero el enfoque de modelaje de sistemas utilizando el método de pesos residuales resulta más extenso en cuanto a aplicación se refiere.

Referencias

1. Becker, A.A., **The Boundary Element Method in Engineering**, McGraw-Hill Book Company, Great Britain, 1992.
2. Brebbia, C.A. y Dominguez, J., **Boundary Elements: An Introductory Course**, 2da ed., Mc Graw-Hill, Great Britain, 1992.
3. Banerjee, P.K. y Butterfield, R., **The Boundary Element Methods in Engineering**, 2da ed., McGraw-Hill, Great Britain, 1993.
4. Roach, G.F., **Green's Functions**, 2da ed., Cambridge University Press, 1989.

Aritmética Racional vs Aritmética de Punto Flotante

Por: Anatoli Markelov Ph.D.

Es bien conocido que la aritmética de enteros es mucho más rápida que la aritmética de punto flotante. Pero la aritmética de enteros no puede alcanzar precisiones de cálculo necesarias en cualquier programa real serio.

Al mismo tiempo en programas de control automático en tiempo real el uso de la aritmética de punto flotante resuelve el problema de precisión, pero a cuenta de una desaceleración significativa de cálculos.

Especialmente esta desaceleración afecta a la calidad de control para los sistemas automáticos los cuales tienen plantas de control con muy pequeños valores de constantes de tiempo (sistemas de control dinámicos rápidos) y en los cuales se implementan algoritmos de control complicados. En estos casos una velocidad baja de cálculos exige un aumento del periodo de muestreo con todas las consecuencias negativas para la calidad de funcionamiento de sistemas de control.