Sobre la Simetría y Asimetría del Tensor de Esfuerzo

Ing. Carlos Ramón PLAZAOLA L., correo-e: cplazaola@yahoo.com

Extracto General.

En este articulo se presenta un análisis de la manera en que las hipótesis sobre el comportamiento de los materiales, la configuración de referencia utilizada y la forma en que se define el tensor de esfuerzo, determinan las propiedades de simetria o asimetria del mismo.

Introducción.

Las discusiones y derivaciones presentadas por muchos autores [1], [2],[3], etc. al introducir el concepto de tensor de esfuerzo, concluyen que este es simétrico. El tensor de esfuerzo, sin embargo, no siempre es simétrico. La simetria o asimetria del tensor de esfuerzo depende de la versión del tensor de esfuerzo que se use, del medio continuo objeto de estudio y al menos un autor [4], cuestiona la simetria del tensor de esfuerzo de Cauchy, este último es la versión que aparece definida en una gran cantidad de textos de resistencia de materiales, mecánica de sólidos y de introducción a la mecánica de medios continuos.

Tensor de Esfuerzo de Cauchy.

La definición del tensor de esfuerzo de Cauchy está basada en la configuración final del medio, es decir en la geometria deformada. Si se define un sistema de coordenadas (x^1, x^2, x^3) que puede ser cartesiano (si se usan coordenadas curvilineas, para una formulación más general, entonces se obtendrian las versiones covariante y/o contravariante del tensor de Cauchy), y se plantea un balance de fuerzas (esta derivación aparece en libros de mecánica de medios continuos [5], [6], y no será repetida aqui) se obtiene la familiar ecuación:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x^i} + \rho b_j = 0$$

donde:

σ_{ij} : Componente del tensor de esfuerzo de Cauchy.
ρ : Densidad del medio.
b_j : Componentes del vector de fuerzas corporales por unidad de masa (incluyendo fuerzas inerciales)

Del balance de momentos se obtiene que el tensor de esfuerzo de Cauchy es simétrico, así:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

En las versiones covariante y contravariante, el tensor de Cauchy es también simétrico. Existe, sin embargo, una variedad de materiales con características magnéticas, conocidos como medios continuos polares [7], para los que al hacer balance de momentos, es necesario incluir momentos corporales distribuidos. Dependiendo del material, puede ser necesario incluir momentos superficiales distribuidos (en la frontera o en superficies internas) y/o una contribución de momentum angular intrínseco en las componentes inerciales.

Una expresión para el balance de momentos en un medio continuo polar, podría ser la siguiente:

$$\int_{\partial R} \bar{x}\times(\bar{n}\cdot\bar{\bar{\sigma}})dA + \int_R \bar{x}\times\rho\bar{b}\,dV + \int_{\partial R}\bar{r}\,dA + \int_R \rho\bar{m}\,dV = 0$$

$\bar{r}$: momento por unidad de superficie
$\bar{m}$: momento por unidad de masa

Si en la expresión anterior se hacen cero los momentos distribuidos, ésta se reduce a la suma de las dos primeras integrales y esto llevaría a la conclusión de que el tensor es simétrico. La presencia de las dos últimas integrales en la expresión permite concluir que el tensor de Cauchy es asimétrico para medios polares, así:

$$\sigma_{ij} \neq \sigma_{ji}$$

Tensores de Esfuerzo de Piola – Kirchhoff.

El tensor de Cauchy es adecuado en el análisis de problemas de deformaciones infinitesimales, donde la geometria del medio no deformado no difiere en gran manera de la del medio deformado. En problemas de deformaciones finitas, en general, existen diferencias considerables entre la geometria del medio deformado y no deformado. Debido a estas diferencias es conveniente definir el esfuerzo en base a áreas de la superficie no deformada (configuración de referencia). El tensor de esfuerzo de Cauchy está basado en la configuración deformada, por lo tanto, es inadecuado en el análisis de problemas de deformaciones finitas.

Un tensor basado en la geometria deformada es el Primer Tensor de Esfuerzo de Piola – Kirchhoff, definido por la siguiente expresión:

$$\overline{\overline{P}} = J\overline{\overline{\sigma}}\,\overline{\overline{F}}^{-T}$$

donde:

$\overline{\overline{P}}$ Primer Tensor de Esfuerzo de Piola-Kirchoff

J Jacobiano de la Transformación de coordenadas entre las configuraciones deformadas y no deformada

$\overline{\overline{\sigma}}$ Tensor de Esfuerzo de Cauchy

$\overline{\overline{F}}$ Tensor gradiente de deformación

Este tensor es un tensor asimétrico (aún para medios no polares) y se le conoce también como el tensor de esfuerzo nominal. La asimetría de este tensor complica la formulación de ecuaciones constitutivas al tratar de combinarlo con el tensor de deformación, que es simétrico. Para sortear este inconveniente se define el Segundo Tensor de Esfuerzo de Piola – Kirchhoff, dado por:

$$\overline{\overline{T}} = \overline{\overline{P}}(\overline{\overline{F}}^{-1})^{T}$$

en términos del tensor de Cauchy

$$\overline{\overline{T}} = J\overline{\overline{F}}^{-1}\overline{\overline{\sigma}}(\overline{\overline{F}}^{-1})^{T}$$

Este tensor es simétrico (para medios no polares). Los tensores Primero y Segundo de Piola – Kirchhoff se reducen al tensor de Cauchy si en el análisis se consideran gradientes de desplazamiento infinitesimales.

Conclusión.

De acuerdo a lo expuesto anteriormente se concluye que en una formulación general de las ecuaciones de campo, el tensor de esfuerzo es, en general, asimétrico y que la simetría del tensor corresponde a un caso particular que se podría obtener luego de hacer simplificaciones en las ecuaciones generales.♦

Referencias.

1. Gere, J.M. y Timoshenko, S.P., Mecánica de Materiales, 2da ed. , Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1986.

2. Dym, C.L. y Shames, I.H. ; Solid Mechanics, 1ra ed., McGraw – Hill, New York, 1973.

3. Shigley, J.E. y Mischke, C.R. ; Diseño en Ingeniería Mecánica, 5 ta ed., McGraw – Hill, México, 1990.

4. Reissner, E. ; "Note on the Theorem of the Symmetry of the Stress Tensor". Journal of Matrhematics and Physics, Vol 25, 1946.

5. Segel, L.A. ; Mathematics Applied to Continuum Mechanics, 2 nd ed., Dover, New York, 1987.

6. Frederick, D. Y Chang, T.S.; Continuum Mechanics, 1 st ed., Scientific Publishers, Inc., Cambrige, 1972.

7. Malvern, L.E.; Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium, 1 st ed., Prentice – Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1969.

Capacidad teórica de plantas mareomotrices de bombeo vertical

Dr. Anatoli MARKELOV, Facultad de Ingeniería Mecánica

Existen diferentes tipos de instalaciones para convertir energía mareomotriz generalmente en energía eléctrica. El principio de conversión de energía consiste en el uso de una diferencia de niveles de agua oceánica a ambos lados de un dique que encierra un área oceánica. La diferencia de niveles causa una diferencia de presiones de agua dentro y fuera del dique, y bajo esta diferencia de presiones los chorros de agua que pasan a través del dique hacen rotar sistemas hidroturbinas-generadores produciendo de este modo energía eléctrica. El uso de dicho principio tradicional de producción de energía eléctrica tiene una desventaja cardinal: la energía eléctrica se genera no constantemente, sino cíclicamente conforme a los ciclos de mareas. Esto significa que hay una secuencia de periodos alternantes de ausencia y generación de energía eléctrica con un período igual al período de mareas oceánicas (aproximadamente 6 horas), que en la práctica causa serias incomodidades al usar la energía eléctrica obtenida por medio de dicho principio.

En el presente trabajo analizaremos un nuevo principio de transformación de energía mareomotriz en energía