

correspondientes) entonces sus resistencias residuales por unidad de desplazamiento será la misma".

Esta es una importante ley la cual hace posible estimar la resistencia residual de un buque a partir de un modelo a escala con las mismas formas.

El tanque de Froude construido por 1871 fue en todo caso una larga trocha de 76 metros de longitud, con un ancho de 2 metros en el fondo y 8 metros en la superficie. La profundidad era de 3 metros. Este tanque fue el primer canal de pruebas hidrodinámicas en el mundo que ha sido imitado en muchos lugares de la tierra, todos contribuyendo en mayor o menor grado a la resolución de nuevos problemas los cuales se han desarrollado por años.

Modernos tanques de pruebas han sido desarrollados para medir las resistencias de los modelos pero básicamente son muy similares al primero construido por el Sr. Froude. Con respecto a

los modelos, éstos varían en sus esloras que puede estar entre los 4 y 9 metros. En el Reino Unido, estos modelos son desarrollados a partir de cera, en vista que este material es de fácil tallado, siendo así, que una vez terminadas las pruebas estos son derretidos y el material vuelve a usarse.

En otros escritos trataré de explicar la forma cómo se presentan y toman los datos para los cálculos de resistencias hidrodinámicas en los cascos de los buques.

#### Referencias

1. Munro-Smith, A.; Ships and Naval Architecture; Ed. The Institute of Marine Engineers, Londres, 1973
2. Comstock, J.P.; Principles of Naval Architecture; Ed. Society of Naval Architects and Marine Engineering, U.S.A.
3. Van Manem, J.D.; Fundamentals of Ship Resistance and Propulsion; Ed. International Shipbuilding Progress, Rotterdam, Países Bajos.

## ANÁLISIS DEL EFECTO DE LAS CONDICIONES DE FRONTERA EN LA RESPUESTA DINÁMICA DE PLACAS ANISOTRÓPICAS

Ing. Benigno VARGAS G., Decano de la F.I.M., U.T.P.

Ing. Carlos R. PLAZAOLA L. Profesor Asesor, Panama Canal College.

#### Extracto General

La respuesta dinámica de placas anisotrópicas e isotrópicas con diferentes condiciones de frontera y sujetas a cargas de impulso fue investigado. Para realizar este análisis se inicia partiendo de las ecuaciones de movimiento presentadas por J. M. Whitney, para la solución de estas ecuaciones se utilizó el Método de Levy.

El estudio incluye un análisis de vibración libre y forzado tanto para placas anisotrópicas (ortotrópica) como isotrópicas, tomando en cuenta el efecto de las condiciones de frontera.

La solución para el problema dinámico de dos pulsos fue obtenida. Se utilizaron dos tipos de carga impulsiva, modeladas mediante pulsos de forma senoidal y escalón.

#### Introducción

Desde las publicaciones de Euler [1], Lagrange, Navier, Kirchhoff [2] y Levy [3], se ha dedicado gran esfuerzo a las investigaciones de las características dinámicas de placas en diferentes configuraciones, geometrías, condiciones de frontera y otras variantes. Sin embargo, con el desarrollo de nuevos materiales estructurales, como plásticos, materiales compuestos reforzados con fibras y su incremento en aplicaciones en componentes estructurales, se hacen necesarias más investigaciones en este campo.

Las teorías de placas compuestas laminadas delgadas han sido establecidas por Lekhnitskii [4], Reissner y Stavsky [5], Dong, Pister y Taylor [6] y Stavsky [7]. Detalles de estos trabajos, incluyendo la solución para muchos problemas de fronteras pueden ser encontrados en los trabajos de J.E. Ashton y J.M. Whitney [8].

Trabajos analíticos dedicados al estudio de la respuesta forzada de placas de material compuesto laminadas han sido menos evidentes. Meirovitch [9] y Warburton [10] analizaron la respuesta de placas isotrópicas para cargas dinámicas mientras que Yu [11] y Sun y Whitney [12] han presentado la respuesta para placas anisotrópicas en flexión cilíndrica.

Dobyns [13], presentó un análisis de placas delgadas ortotrópicas con condiciones de fronteras de simple apoyo sujeta a cargas estáticas y dinámicas. Vargas [14], presentó un análisis de placas delgadas anisotrópicas (ortotrópicas) e isotrópicas con diferentes condiciones de frontera sujetas a cargas estáticas y dinámicas, además del efecto de la duración y forma de las cargas impulsivas.

El objeto de este trabajo es determinar la respuesta dinámica de placas anisotrópicas e isotrópicas con diferentes condiciones de frontera y sujeta a cargas de impulso.

El material de la placa anisotrópica se asumirá ortotrópico y la teoría lineal de elasticidad será utilizada para formular el problema.

Se tomará en cuenta el efecto de inercia rotatoria, pero no el efecto de la deformación cortante transversal para este análisis.

Los efectos de las cargas de impulso modelada por pulsos de forma senoidal y escalón serán analizados, así como su forma y duración. Para simplificar el análisis se asumirá que los pulsos actúan sobre la superficie de la placa uniformemente. La solución de la ecuación de movimiento está basada en el método de Levy.

#### ANÁLISIS

En la figura 1 y 2 se muestran el sistema de coordenadas  $x$ ,  $y$ ,  $z$  y la geometría y sistema de referencia utilizados para el análisis de placas laminadas, respectivamente. La longitud, el ancho y el espesor son denotados por las dimensiones  $a$ ,  $b$ , y  $h$ , respectivamente.

El análisis se basa en las hipótesis siguientes:

- 1- La placa es construida de un número arbitrario de láminas, consideradas macroscópicamente como un material con comportamiento elástico homogéneo ortotrópico, unidas entre ellas perfectamente. Sin embargo los ejes ortotrópicos de simetría de una lámina individual no necesariamente coinciden con los ejes  $x$ ,  $y$ ,  $z$  de la placa.
- 2- La placa es delgada, es decir, el espesor  $h$  es mucho más pequeño que cualquier otra dimensión.
- 3- Los desplazamientos  $u$ ,  $v$ ,  $w$  son pequeños comparados con el espesor de la placa.
- 4- Las deformaciones planas  $\epsilon_{xx}$ ,  $\epsilon_{yy}$  y  $\epsilon_{xy}$  son pequeñas comparadas con la unidad.
- 5- Las deformaciones cortantes  $\epsilon_{xz}$  y  $\epsilon_{yz}$  son despreciables.
- 6- Los desplazamientos transversales  $u$ ,  $v$ ,  $w$  son funciones lineales de  $z$ .
- 7- La deformación transversal normal  $\epsilon_z$  es despreciable.
- 8- Cada lámina se comporta de acuerdo a la Ley de Hooke.
- 9- Los efectos de campos gravitatorio, eléctrico o magnético son despreciables.
- 10- Los esfuerzos transversales cortantes  $\epsilon_{xz}$  y  $\epsilon_{yz}$  desaparecen en la superficie de la placa para  $z = \pm h/2$ .
- 11- Los efectos térmicos e higrótérmicos son despreciables.

Los detalles de las derivaciones de las ecuaciones son presentados por Vargas [14] y no se incluyen aquí por brevedad. Combinando las ecuaciones de cinemática, de equilibrio dinámico y las ecuaciones constitutivas se obtiene la ecuación diferencial para placas anisotrópicas (ortotrópicas) e isotrópicas respectivamente.

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \rho h \frac{\partial^4 w}{\partial t^2} = p(x, y, t) \quad (1)$$

$$D \left[ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] + \rho h \frac{\partial^4 w}{\partial t^2} = p(x, y, t) \quad (2)$$

El método utilizado para solucionar la ecuación diferencial (2) fue el método de Levy, llamado así en honor a Maurice Levy, quien en 1899 presentó este método de solución de series infinitas de medio rango para placas isotrópicas, el cual también puede ser usado para solucionar la ecuación diferencial de placas de material compuesto.

#### Vibración Libre

Detalles del análisis son presentados por Vargas [14]; solo algunos de los resultados son presentados aquí.

Para determinar la frecuencia natural y los modos naturales de vibración de una placa, el método de Levy fue utilizado. Este método consiste en asumir una solución de series infinitas de senos de medio rango de la siguiente forma:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \phi_m(y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad (3)$$

Solución esta que debe satisfacer las cuatro condiciones de frontera en  $x$ . Donde  $\phi_m(y)$  es una función desconocida en  $y$ .

Se analizaron estructuras hechas de acero de plástico reforzado con fibra de gráf ito o carbón (CFRP) tipo T300/N5208, donde la disposición de las láminas de la placas compuestas es [(45/0)<sub>4</sub>].

Para este estudio los parámetros geométricos tanto de la placa anisotrópica como el de la placa isotrópica fueron seleccionados del mismo tamaño con el objeto de comparar los resultados.

Como se esperaba, de los tres casos analizados, es en el caso de cuatro bordes simplemente apoyados, tanto para placa anisotrópica como para la isotrópica, donde se obtuvieron los valores de frecuencias naturales más bajas, esto es así ya que esta es la configuración más flexible de la estructura. El valor de frecuencia más alto se obtuvo en el caso de dos bordes empotrados y dos simplemente apoyados, esto es razonable, ya que esta es la configuración más rígida de la estructura.

Las formas de los modos correspondiente a varias frecuencias naturales son mostradas en las Figuras 3 y 4, para el caso de dos bordes empotrados y dos simplemente apoyados para 2 valores de  $m$  y  $n$  para placas de material compuesto anisotrópico (ortotrópico).

#### Vibración Forzada

En esta parte del estudio se presentará la respuesta forzada de placas anisotrópicas e isotrópicas sujetas a cargas de impacto, modeladas mediante pulsos de forma senoidal y escalón, tomada de Dobyns [13], donde las expresiones analíticas para cada uno son dadas. El objetivo es analizar no solo el efecto de las características del pulso, tales como forma y duración, sino también los efectos de las condiciones de frontera y los materiales de la placa.

La solución para la ecuación (1) y (2) en el caso forzado puede expresarse de la siguiente forma:

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) F_{mn}(t) \quad (4)$$

Detalles del análisis de vibración forzada son dados por Vargas [4].

Para ilustrar la respuesta dinámica, la razón  $W_d/W_{stat}$  fue obtenida como una función del  $t$  para los tres casos analizados, donde  $W_d$  es la Componente transversal de desplazamiento estático, producida por la acción de una carga uniforme y evaluada para los casos 1 y 3 en  $x = a/2$ ,  $y = b/2$ , y para el caso 2 en el punto  $x = a/4$ ,  $y = b/4$ .

Para este análisis se tomaron cuatro razones adimensionales de tiempo  $t_1/t_c$  (0.5, 0.9, 1.1, 2), donde  $t_1$  es la duración del pulso y  $t_c$  es el tiempo crítico. De este análisis se pudo observar que se obtienen mayores razones de amplitudes  $w_d/w_{stat}$  en la respuesta dinámica cuando se consideran cargas modeladas con pulsos de forma escalonada. Tal como se puede observar en las Figuras 5 y 6 para uno de los casos analizados y una relación de  $t_1/t_c = 2$ .

#### CONCLUSIONES

- Las condiciones de fronteras afectan la rigidez de una estructura y por lo tanto las frecuencias naturales y los modos normales de la misma.
- La respuesta a cargas dinámicas es función de las frecuencias naturales y modos normales, por lo que se espera que la respuesta dinámica de una estructura sea también función de las condiciones de frontera.
- De los tres casos analizados, la frecuencia fundamental para el caso de cuatro bordes simplemente apoyados, fue aproximadamente 10% menor que la del caso de un borde empotrado y tres bordes simplemente apoyados y 21% menor que el caso de dos bordes empotrados y dos bordes simplemente apoyados para la placa anisotrópica y para la placa isotrópica la frecuencia fundamental para el caso de cuatro bordes simplemente apoyados, fue aproximadamente 17% menor que la del caso de un borde empotrado y tres bordes simplemente apoyados y aproximadamente 32% menor que el caso de dos bordes empotrados y dos bordes simplemente apoyados, esto es así ya que ésta es la configuración más flexible de la estructura.
- El valor de frecuencia más alto se obtuvo en el caso de dos bordes empotrados y dos simplemente apoyados, esto es

razonable, ya que ésta es la configuración más rígida de la estructura, resultados estos que concuerdan con lo esperado.

- El efecto de la condición de frontera fue también investigado. Con respecto a la condición de frontera que produjo mayor razón de desplazamiento fue la de cuatro bordes simplemente apoyados ya que esta es la configuración más flexible de las estructuras analizadas.
- Se usaron dos tipos de cargas impulsivas, modeladas mediante pulsos de forma senoidal y escalón, se puede indicar que cuando el pulso escalón fue usado como la función forzada, la razón de amplitud más grande de vibración fue obtenida.
- En este punto se puede señalar que son pocos los trabajos desarrollados en el análisis forzado para placas anisotrópicas e isotrópicas. Como futuros trabajos en esta dirección se podrían considerar investigaciones que consideren:

- [a] Los efectos de la deformación transversal cortante.
- [b] La respuesta dinámica para otros casos de condiciones de fronteras.
- [c] Análisis de vibración forzada de otras formas geométricas de placas.

**Bibliografía**

[1] L. Euler "De Motu Vibratorio Tympanorum", Novi Comentary Acad. Petropolit, Volum. 10, pág. 243-260, 1766.  
 [2] G. Kirchhoff. "Vorlesungen Uber Mathematische physikff", Volume 1. B. O. Teubner, 1986.  
 [3] M. Levy. "Sur L'equilibre Elastique D'une Plaque Rectangulaire". Compt. rend. 129, pages 535-539, 1899.  
 [4] S.G. Lekhnitskii, "Anisotropic Plates", translated from the second Russian Edition by S.W. Tsai and T. Cheron (Gordon and Breach, New York 1968), p. 295.

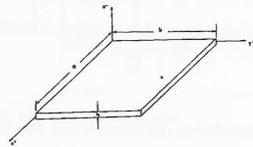


Figura 1: Sistema de coordenadas de la placa.



Figura 3: Forma de los modos para el caso 1, correspondiente a la  $\Omega_{11}$ .

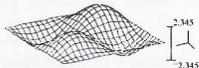


Figura 4: Forma de los modos para el caso 1, correspondiente a la  $\Omega_{22}$ .

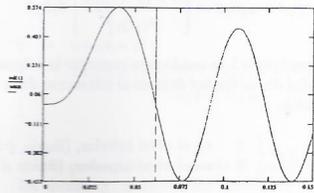


Figura 5: Respuesta Dinámica para el pulso senoidal para  $t_1/t_c = 2$ , caso 1.

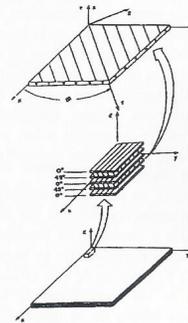


Figura 2: Geometría y sistema de referencia para una placa laminada.

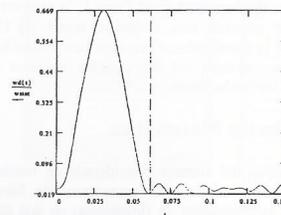


Figura 6: Respuesta Dinámica para el pulso escalón para  $t_1/t_c = 2$ , caso 1.

[5] E. Reissner and Y. Stavsky, "Bending and Stretching of Certain Types and Heterogeneous Aeolotropic Elastic Plates", J. Applied mech. 28, 402-408 (1961).  
 [6] S. B. Dong, K. S. Pister y R. L. Taylor, "On the Theory of Laminated Anisotropic Shells and Plates", J. Aerospace Sci. 29, 969-975 (1962).  
 [7] Y. Stavsky, "Bending and Stretching of Laminated Aeolotropic Plates", J. eng. mech. div. (american society of civil Engineers); 97, 31-35 (1961).  
 [8] J. E. Ashton y J. M. Whitney. "Theory of Laminated Plates", Technomic Publishing Company, Inc. Stamford, Conn., 1970.  
 [9] Mierovitch, L., "Analytical Methods in Vibrations", MacMillian, London 1967.  
 [10] Warburton, G. B., "The Dynamical Behaviour of Structures", Pergamon Press, Oxford, 1964.  
 [11] Yu, Y.Y., "Forced Flexural Vibrations of Sandwich Plates in Plane Strain", Journal of Applied Mechanics, Vol.27, May, 1960, pp.535-540.  
 [12] Sun, C. T. y Whitney, J. M., "Forced Vibrations of Laminated Composite Plates in Cylindrical Bending", Journal of the Acoustical Society of America, Vol 55 May 1974, pp.1003-1008.  
 [13] A. L. Dobyns, "Analysis of Simply-Supported Orthotropic Plates Subject to Static and Dynamic Loads", AIAA Journal, vol. 19, No. 5, (Mayo 1981), p. 642-650.  
 [14] B. O. Vargas, "Análisis del Efecto de las Condiciones de Frontera en la Respuesta Dinámica de Placas Anisotrópicas", Tesis de Maestría en Ciencias de la Ingeniería Mecánica, Universidad Tecnológica de Panamá, 1994.  
 [15] Plazaola C. R. "Effects of Blast Loads on Laminated Composite Material Circular Cyndrical Shells", Master of Mechanical Engineering Thesis, University of Delawarwe, 1991.