

# Análisis de la Interacción entre una Grieta y un Barreno Aplicando la Mecánica de la Fractura y el Método Fotoelástico

Maribel Angélica Mendoza Nuñez\*

Gabriel Villa y Rabasa\*\*

Luis H. Hernández Gómez\*\*

\*Escuela Superior de Ingeniería Mecánica ESIME-Culhuacan

Sta. Ana No. 1000 , Col. San Francisco Culhuacan, Delegación Coyoacán, México, D.F.,

[mmendozan@ipn.mx](mailto:mmendozan@ipn.mx)

\*\*Sección de Estudios de Posgrado e Investigación ESIME-IPN

Unidad Profesional "Adolfo López Mateos"

Av. Politécnico S/N, Col. Lindavista, Edificio 5, 2<sup>a</sup> Piso, México, D.F., C.P. 07738

Tel.5729-6000 ext.54691,.

## 1. Resumen

Uno de los problemas típicos en elementos estructurales, placas, elementos mecánicos, es la interacción de una grieta con un barreno existente. La manera de investigar la propagación de una grieta es hacerla interactuar con un barreno localizado en una trayectoria de propagación. Este punto es de vital importancia ya que el conocer de manera confiable el campo de esfuerzos producido por la interacción de la grieta y el barreno. Por lo tanto, el campo de esfuerzos es complejo ya que está presente a la vez una singularidad con una concentración. El problema no es fácil de resolver analíticamente, la solución alterna puede ser la numérica o la experimental, por tal razón se está proponiendo en este trabajo la aplicación del Método Fotoelástico, ya que permite tener una visión completa del campo de esfuerzos. Sin embargo es importante validar, la veracidad y exactitud con aplicación de métodos numéricos como el método del Elemento Finito (ANSYS) en base a la mecánica de la fractura y FRAND2D.

## 2. Desarrollo

### 2.1 Marco teórico

*Métodos para la obtención del Factor de Intensidad de Esfuerzos a partir de franjas isocromáticas.*

Los primeros investigadores que mostraron la aplicación de la fotoelasticidad en la mecánica de fractura fueron: Post [1], Wells y Post [2].

La magnitud de  $(\sigma_1 - \sigma_2)$  puede obtenerse en todos los puntos de un modelo fotoelástico a partir de la interpretación del patrón de franjas *isocromáticas*. Sin embargo, en los bordes libres del modelo donde no existen aplicadas fuerzas externas, uno de los esfuerzos principales (el perpendicular a la superficie) es nulo de donde podemos obtener el esfuerzo principal tangente al borde del modelo por la simple aplicación de la expresión:

$$(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{Nf}{t} \quad (1)$$

Por medio de las *isocromáticas* es posible cuantificar el valor de la diferencia de esfuerzos principales  $(\sigma_1 - \sigma_2)$ . Pues bien, conocida esta diferencia y la inclinación  $\theta$  de los esfuerzos principales, es posible determinar los esfuerzos cortantes  $\tau_{xy}$  por medio de:

$$\tau_{xy} = \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right) \sin 2\theta \quad (2)$$

en su forma fotoelástica:

$$\tau_{xy} = \left( \frac{Nf}{2t} \right) \sin 2\theta \quad (3)$$

Los esfuerzos cortantes máximos  $\tau_{\max}$  pueden obtenerse también por medio de:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (4)$$

la que en su forma fotoelástica se convierte en:

$$\tau_{\max} = \frac{Nf}{2t} \quad (5)$$

En métodos convencionales, al determinar el factor de intensidad de esfuerzos [3,4], los resultados obtenidos dependen del tamaño de la franja isocromática, obtenida del ensayo fotoelástico, y también de los puntos seleccionados sobre dicha franja. Pero el método que aquí se propone trata de superar estas limitaciones. Para este efecto, se traza la franja sobre una hoja de papel, como lo indica la figura (2.12), se seleccionan  $2n$  conjuntos de números  $(r_i, \theta_j)$  y  $(r_i, \theta_{j+1})$ , sobre una franja uniéndolos con  $n$  arcos de radio  $i$  donde  $i = 1, 2, 3, 4, \dots, n$ . y  $j = 1, 3, 5, 7, \dots, 2n-1$ .

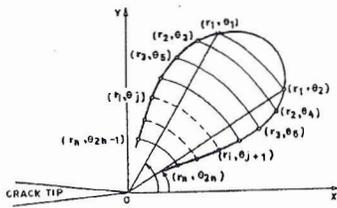


Figura 1 Selección de los puntos sobre una franja isocromática.

El valor del factor de intensidad de esfuerzos  $K_I$  se determina utilizando el método de la constante  $r$ , en donde el factor de intensidad de esfuerzos se gráfica con respecto a  $r$ . La parte lineal de la curva se extrapola al punto  $r = 0$ , para obtener el valor del factor de intensidad de esfuerzos para una grieta con una geometría dada y la condición de carga aplicada.

La ecuación dada por el método de la constante  $r$  es:

$$(2\tau_m)^2 = \frac{1}{2\pi} (K_I \text{sen}\theta + 2K_{II} \text{cos}\theta)^2 + (K_I \text{sen}\theta)^2 \quad (6)$$

Para el Modo I de fractura, la ecuación 2.17, se reduce a la forma siguiente:

$$K_I = \left( \frac{Nf_\sigma}{h} \right) \left( \frac{2\pi}{\text{sen}\theta} \right) \quad (7)$$

Por lo tanto, para los puntos  $(r_1, \theta_1)$  y  $(r_1, \theta_2)$  el  $K_I$  se obtiene con:

$$K_I = \left( \frac{Nf_\sigma}{2h} \right) \cdot 2\pi (\text{csc}\theta_1 + \text{csc}\theta_2) \quad (8)$$

Un procedimiento utilizado para la Obtención del **Factor de Intensidad de Esfuerzos ( $K_I$ )**, es el de proyectar sobre una hoja de papel, el patrón de franjas isocromáticas generadas en la punta de la grieta, con el propósito de tener una ampliación del patrón de franjas y así mismo una visualidad más clara de los colores obtenidos de acuerdo a la carga que se le aplicó.

Por lo tanto, se procede a describir los pasos necesarios para la obtención de Factor de Intensidad de Esfuerzos ( $K_I$ ), como sigue a continuación:

1.- Se proyecta la diapositiva de una placa con una fuerza específica, donde se manifiestan los colores del patrón de franjas isocromáticas obtenidos de la prueba fotoelástica, estos a su vez se están proyectando en la hoja de papel. Así mismo, se traza una línea recta a lo largo de la grieta que pasa por su vértice.

2.- Se traza una perpendicular a la recta antes mencionada, exactamente en la punta de la grieta. Esto se hace debido a que las ecuaciones utilizadas para calcular  $K_I$  deben manejar un ángulo de  $90^\circ$ .

3.- Se toma el ancho real de la probeta y el ancho proyectado de la diapositiva, haciendo uso de una regla de tres simple se sustituyen los datos antes mencionados en la ecuación (9), obteniendo los radios en escala real de los colores que representan los esfuerzos.

$$X' = \frac{(X)(P)}{Pp} \quad (9)$$

Donde:

$X'$  = Valor del radio real.

$X$  = Valor del radio proyectado

$P$  = Ancho del espécimen.

$Pp$  = Ancho del espécimen proyectado de la diapositiva.

4.- Utilizando la ecuación (9) de  $K_I$ , se requieren dos radios ( $r_i$  y  $r_j$ ), los cuales corresponden a la frontera final e inicial o viceversa de cada franja isocromática de los colores mostrados en la fotografía proyectada. Estos radios son medidos y posteriormente transformados a la escala correspondiente con la ecuación (9).

5.- Con cada color de las franjas isocromáticas se obtiene un valor del orden de franja llamado "N", y su magnitud se obtiene de la tabla 1.

RETRASO "R" (nm)	COLOR CAMPO CLARO	COLOR CAMPO OSCURO	ORDEN DE FRANJA
0	BLANCO	NEGRO	0
350	VIOLETA	AMARILLO	0.60
460	AZUL	NARANJA	0.80
520	AZUL-VERDE	NARANJA-ROJIZO	0.90
575	VERDE-AMARILLO	PURPURA (1 <sup>ra</sup> franja de paso)	1.00
620	NARANJA	AZUL	1.08
700	NARANJA-ROJIZO	AZUL-VERDE	1.22
800	PURPURA	VERDE-AMARILLO	1.39
935	AZUL	NARANJA	1.63
1050	-----	ROSA-ROJO	1.82
1150	VERDE-AMARILLO	PURPURA (2 <sup>a</sup> franja de paso)	2.00
1350	ROJO	VERDE	2.35
1440	PURPURA	VERDE-AMARILLO	2.50
1520	VERDE	ROJO	2.65
1730	-----	ROJO TRANSICIÓN CON VERDE	3.00
1800	ROJO	VERDE	3.10
2100	-----	ROSA	3.65
2300	-----	ROSA TRANSICIÓN CON VERDE	4.00
2400	ROJO	VERDE	4.15

6.- Con los datos obtenidos al medir los radios de las franjas isocromáticas, se calcula primeramente el esfuerzo cortante máximo  $\tau_{\max}$ , el cual a lo largo de la línea de propagación de la grieta es cero para los casos simétricos, con la siguiente ecuación.

$$\tau_{\max} = \frac{C}{2t} (N) \quad (10)$$

donde:

C = Coeficiente óptico de esfuerzo (7kPa/franja/m)

t = Espesor de la placa

N = Orden de franja obtenido

7.- Una vez obtenidos los esfuerzos cortantes máximos los valores de los radios respectivos se proceden a calcular el factor de intensidad de esfuerzos para el modo I ( $K_I$ ) con la ecuación (11).

$$K_I = \sqrt{2\pi r_{\max}} \frac{(2\tau_{\max})_i - (2\tau_{\max})_j}{1 - \left(\frac{r_i}{r_j}\right)^{1/2}} \quad (11)$$

8.- Para todas las permutaciones posibles, de los pares de franjas que se encuentran en la tabla, se obtienen valores de  $K_I$  para posteriormente obtener un promedio con todos estos.

9.- Se obtiene la desviación estándar con los valores de  $K_I$  encontrados para las diferentes permutaciones.

10.- Al promedio obtenido se le resta y se le suma la desviación estándar generando un intervalo, por medio del cual se eliminan los valores de  $K_I$  que se encuentren fuera del mismo, y obtener nuevamente un promedio con los datos que se encuentran dentro de dicho intervalo, y así llegar al **Factor de Intensidad de Esfuerzos** correspondiente a esa fuerza determinada.

## 2.2 Desarrollo experimental

### A. Metodología

#### 2.2.1 Selección del material

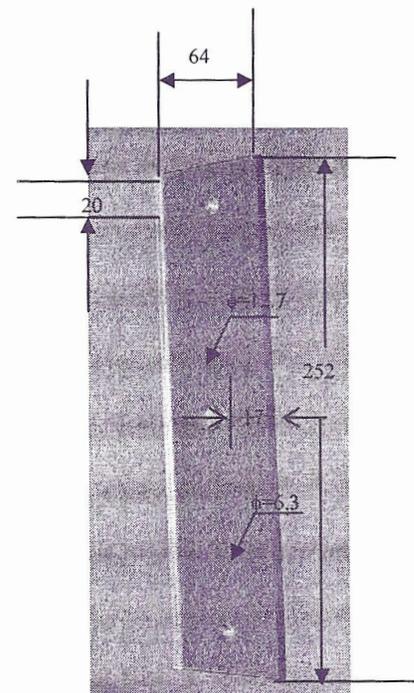
La selección del material apropiado para la prueba fotoelástica es una tarea que el investigador debe realizar, basándose en las características que un buen material fotoelástico debe cumplir, entre las cuales se encuentran: la transparencia, sensibilidad, linealidad, homogeneidad e

isotropía, fluencia, módulo de elasticidad, efecto de envejecimiento, maquinabilidad y costo [5].

El material que se utilizó se denomina PSM-1 es un plástico de Policarbonato Recocido, ideal para la elaboración de modelos Fotoelásticos Bidimensionales [6].

#### 2.2.2 Calibración

En la mayoría de los análisis Fotoelásticos la distribución de esfuerzos en un modelo complejo es tratada como una función de la carga. Para determinar la distribución de esfuerzos en la forma más posible, se requiere de una calibración cuidadosa del valor de franja del material  $f\sigma$ . Dichos valores se pueden encontrar en la literatura técnica, esto no son razonables exactos ya que los valores de franja de los materiales fotoelásticos varían con el fabricante, temperatura, etc. Por esta razón es siempre necesario calibrar cada hoja de material fotoelástico cada vez que se realiza la prueba [7].



Acot: mm

Fotografía 1 Dimensiones del espécimen de prueba

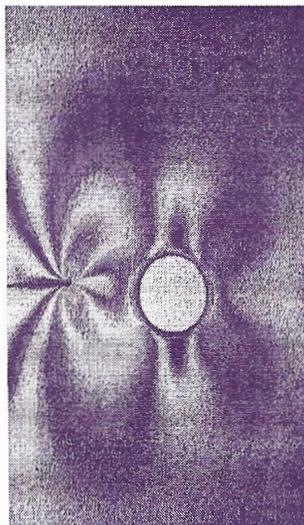
#### 2.2.3 Fabricación de la probeta

Se cortó el modelo de acuerdo a las dimensiones de la fotografía 1, con una sierra, se utilizó los refrigerantes adecuados para esta operación, en este caso se empleó agua debido a que el grado de hidroscofia de este material es muy bajo, para evitar la llamada fotoelasticidad residual que no es otra cosa, sino la

aparición de zonas iluminadas debidas a esfuerzos residuales. Dichas zonas podrían identificarse como regiones de concentración de esfuerzos, lo cual redundaría en errores de apreciación y por lo tanto haría que el experimento fracasara.

#### 2.2.4 Determinación de los valores de orden de franja

Para la determinación de los valores de orden de franja, se tomaron fotografías. La película usada para tomar las franjas isocromáticas, fue de 35mm con (ASA 50), debido a que esta define bien las líneas. En la fotografía 1 se puede apreciar como al inicio de la aplicación de fuerza se ven muy intensos los colores.



**Fotografía 2** Distribución de esfuerzos para una placa con una fuerza de 392.8 N

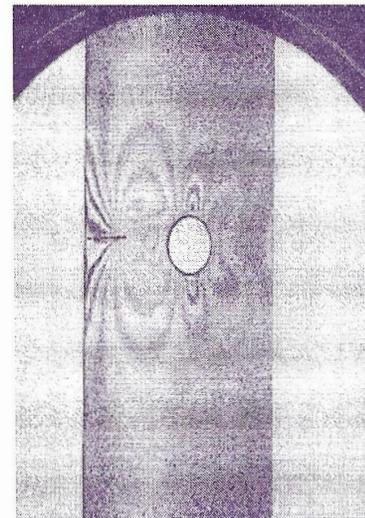
Nótese en la fotografía 3, como cambian los colores, esto significa que hubo una redistribución de los esfuerzos, de tal forma que en algunos puntos donde eran más intensos cambiaron de posición. Esto sucede a medida que la fuerza se va incrementando.

#### 2.2.5 Procedimiento para la obtención de $K_I$ experimental

De acuerdo al procedimiento anteriormente descrito, a continuación se resolverá un caso específico de las pruebas realizadas por el Método Fotoelástico.

Para esta solución numérica, se considera una fuerza a tensión de 882.9 N, aplicada en ambos extremos del espécimen. Con esto, se calcula el Factor de Intensidad de Esfuerzos en las diferentes cargas aplicadas, para conocer el comportamiento de las mismas.

No. De Permutaciones	$r_i$ (mm)	$r_j$ (mm)	$(\tau_{max})_i$ MPa	$(\tau_{max})_j$ MPa	$K_I$ MPa (m) <sup>1/2</sup>
1	0.040	0.0329	0.330	0.496	1.630
2	0.040	0.0256	0.330	0.595	1.062
3	0.040	0.0186	0.330	0.766	0.9374
4	0.040	0.0159	0.330	1.003	1.150
5	0.0329	0.0256	0.496	0.595	0.675
6	0.0329	0.0186	0.496	0.766	0.745
7	0.0329	0.0159	0.496	1.003	1.051
8	0.0256	0.0186	0.595	0.766	0.792
9	0.0256	0.0159	0.595	1.003	1.220
10	0.0186	0.0159	0.766	1.003	1.995



**Fotografía 3** Distribución de esfuerzos para una placa antes de la propagación para un análisis en campo claro con una fuerza de 760.3 N

Carga de 882.9 N  
Ancho real = 640 mm  
Ancho proyectado = 165 mm

Color	$r_{proyectado}$ (mm)	$r_{real}$ (mm)	N	$\tau_{max}$ (mm)
Amarillo	104	40	0.60	0.330
Naranja-Rojizo	85	32	0.90	0.496
Azul	66	25	1.08	0.595
Verde-Amarillo	48	18	1.39	0.766
Rosa-Rojo	41	15	1.82	1.003

Los resultados estadísticos de los valores de  $K_I$  son los siguientes:

Promedio de  $K_I = 1.125$

Desviación Estándar = 0.298

Promedio + Desviación Estándar = 1.424

Promedio - Desviación Estándar = 0.827

Rango = 0.827 a 1.424 (los valores que se encuentran en este rango están seleccionados)

Por lo tanto  $K_I$  es:  $0.924 \text{ MPa } \sqrt{\text{m}}$

### 2.3 Desarrollo numérico

El método del elemento finito es un procedimiento de análisis numérico que se emplea en la solución de una amplia variedad de problemas de ingeniería. En la actualidad se sabe que en muchas situaciones es necesario resolver estos problemas obteniendo soluciones numéricas aproximadas en vez de soluciones exactas, las cuales en algunos casos son difíciles de obtener porque el planteamiento de los modelos matemáticos es extremadamente complicado, tal es el caso de las singularidades del campo de esfuerzos en la punta de la grieta.

#### B. Metodología ANSYS

A continuación se describe la metodología en diferentes fases.

1.- Identificar la geometría del dominio de estudio, determinándose sus dimensiones y forma.

2.- Se definen las propiedades mecánicas del material, el tipo de análisis y el tipo de elemento a utilizar.

3.- Se desarrolla el modelado del componente estructural con una grieta en uno de sus bordes, definiendo sus características geométricas, así como la generación de la malla que puede dividirse en dos partes:

- Se efectúa la malla en la punta de la grieta con elementos triangulares de 6 nodos "PLANE2", los cuales tienen la característica de tener ubicados los nodos más cercanos a la punta de la grieta a una distancia de  $\frac{1}{4}$  de la misma.
- El área fuera de la vecindad de la punta de la grieta se malla con elementos "PLANE82", siendo éste un elemento cuadrilátero de 8 nodos.

4.- Se aplican las condiciones de frontera, las cuales simulan las condiciones de apoyos y de simetría a que está sujeto el componente, así como sus respectivas cargas.

5.- Se inicia el análisis del espécimen, obteniendo el campo de esfuerzos y deformaciones resultantes, para después obtener los parámetros de fractura  $K_I$ .

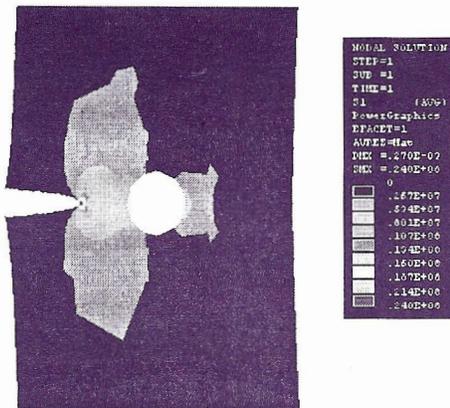


Figura 2 Distribución de esfuerzos con una fuerza de:  $882.9 \text{ N}$

De acuerdo a la Metodología descrita anteriormente obtenemos el factor de Intensidad de Esfuerzos, por lo tanto se obtienen que:

$$K_I = 0.942 \text{ MPa } \sqrt{\text{m}}$$

#### C. Metodología FRANC2D

Se analizaron los casos de estudio con el programa FRANC2D/L. Este programa arrojó resultados similares al análisis por ANSYS. Para esto, FRANC2D, realiza el análisis en dos fases, se genera la geometría de la probeta y se hace una malla en el apartado CASCA. Posteriormente, para la segunda fase se lee el archivo en FRANC2D/L donde se definen las características mecánicas del material y se aplican las condiciones de frontera, se procede a modelar la grieta donde se especifica el nodo de iniciación de la grieta con un cierto incremento. Después se genera la propagación automáticamente con incrementos constantes y se indica el número de etapas que se requieren para una determinada longitud.

Se obtuvo un campo de esfuerzos similar a los de ANSYS. En la figura 3, se presenta la distribución de esfuerzos por FRANC2D para una fuerza de  $882.9 \text{ N}$ .

De acuerdo a la Metodología descrita anteriormente obtenemos el factor de Intensidad de Esfuerzos, por lo tanto se obtienen que:

$$K_I = 0.932 \text{ MPa } \sqrt{\text{m}}$$

Con este software se realizó la simulación de la propagación de la grieta.

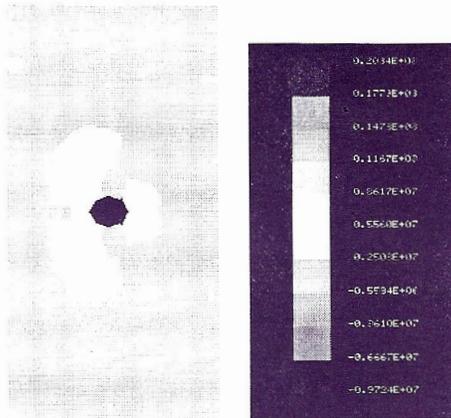


Figura 3 Distribución de esfuerzos con una fuerza de 882.9 N en FRANC2D

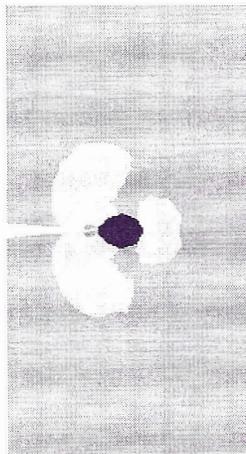


Figura 4 Propagación de la grieta con el software FRANC2D

En la siguiente tabla se muestra el resumen de los valores obtenidos del Factor de Intensidad de Esfuerzos por los tres métodos.

Tabla 1 Resumen de resultados obtenidos del Factor de Intensidad de Esfuerzos.			
CASO	METODO	CARGA (N)	$K_I$ (MPa $\sqrt{m}$ )
CASO DE ESTUDIO GRIETA Y BARRENO COLINEALES	FOTOELASTICIDAD	882.9	0.924
		1275.3	1.268
		2245.5	2.356
	ANSYS	882.9	0.942
		1275.3	1.212
		2245.5	2.297
	FRANC2D	882.9	0.932
		1275.3	1.303
		2245.5	2.461

### 3. Conclusiones

1.- Los resultados obtenidos por ANSYS y FRAND2D, en el caso de estudio, fueron similares a los obtenidos en el análisis experimental (Fotoelasticidad). Por lo tanto la Metodología utilizada en ambos programas de computo es aceptable para este tipo de estudio.

2.- La diferencias entre los resultados experimentales y numéricos, pueden ser ocasionados, porque en los resultados obtenidos numéricamente se consideran materiales ideales, cosa que en la realidad no es cierto, ya que los materiales pueden tener imperfecciones internas y por lo tanto se observa variaciones en los resultados.

### 4. Referencias bibliográficas.

- [1] D. Post. *Photoelastic Stress Analysis for an Edge Crack in a Tensile Field*. Proc. SESA, vol. XII, no. 1, pp. 99-116, 1954.
- [2] A. Wells y D. Post. *The Dynamic Stress Distribution Surrounding a Running Crack-A Photoelastic Analysis*. Proc. SESA, vol. XVI, no. 1, pp. 69-92, 1958.
- [3] Smith, D. G. y Smith C. W., *Enginner Fracture Mechanic*, 4, pp.357-366, 1974.
- [4] Narayana, B., *Investigation of Stresses near the tips of arbitrarily oriented cracks in cylindrical shells under axial and torsional loads*, ISTAM Congress, India, 1984.
- [5] Mindlin, R., "A Mathematical Theory of Photoviscoelasticity", J. Phys, Vol. 20, 1949.
- [6] Instructivo e indicaciones del *Policarbonato PSM-I*.
- [7] Dally, J. And Riley, W., "Experimental Stress Analysis", New York, McGraw-Hill, 1991.